HU / Institutionen för Matematik och Statistik
Gränsvärden, hösten 2016
Övning 6 – Modellsvar

A1. Visa att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-5}{n^2+3} = \infty.$$

Lösning:

Talföljden x_n växer obegränsat om det för varje $M \in \mathbb{R}$ finns en sådan tröskel $k \in \mathbb{N}$, att det för alla $n > k$ gäller $x_n > M$.

Tankar före beviset: Vi uppskattar talföljdens uttryck neråt.[1] För alla $n \in \mathbb{N}$ gäller

$$\frac{n^3-5}{n^2+3} \geq \frac{n^3-5}{n^2+3n^2} \geq \frac{n^3-5}{4n^2} \geq \frac{n^3-5n^2}{4n^2} = \frac{n-5}{4}$$

Nu vill vi skriva att $\frac{n-5}{4} > M$ för vilket som helst $M \in \mathbb{R}$. Vi märker ekvivalensen

$$\frac{n-5}{4} > M \quad \iff \quad n > 4M+5,$$

alltså kan uppskattningen vi vill ha tillsättas, så länge $n > 4M+5$.

Bevis: Låt $M \in \mathbb{R}$. Vi väljer tröskeln $k > 4M+5$. Nu gäller det för alla $n > k$ att

$$\frac{n^3-5}{n^2+3} \geq \ldots \geq \frac{n-5}{4} > \frac{k-5}{4} > \frac{4M+5-5}{4} = M$$

Således har vi visat att uppgiftens talföljd faktiskt växer obegränsat.

A2. Visa att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2-n^3}{n^2-3} = -\infty.$$

Lösning: Talföljden x_n minskar obegränsat om det för varje $m \in \mathbb{R}$ finns en sådan tröskel $k \in \mathbb{N}$, att det för alla $n > k$ gäller $x_n < m$.

Tankar före beviset: Vi uppskattar talföljdens uttryck uppåt.[1] För varje $n \in \mathbb{N}$ gäller

$$\frac{2-n^3}{n^2-3} \leq \frac{2-n^3}{n^2} \leq \frac{2n^2-n^3}{n^2} = 2-n$$

Nu vill vi skriva att $2-n < m$ för vilket som helst $m \in \mathbb{R}$. Vi märker ekvivalensen

$$2-n < m \quad \iff \quad n > 2-m,$$

alltså kan uppskattningen vi vill ha göras, så länge $n > 2-m$.

Bevis: Låt $m \in \mathbb{R}$. Vi väljer tröskeln $k > 2-m$. Nu gäller det för alla $n > k$ att

$$\frac{2-n^3}{n^2-3} \leq \ldots \leq 2-n < 2-k < 2-(2-m) = m$$

Så har vi visat att uppgiftens talföljd faktiskt minskar obegränsat.

[1] Det lönar sig att lägga märke till att det finns negativa termer i täljaren och nämnaren, alltså ska man ta möjliga teckenändringar i beaktande vid uppskattningen av bråkuttrycken. I dessa uppgifter specifikt kan vi göra uppskattningarna vi vill ha, men allmänt sett ska man vara väldigt noggrann då man uppskattar bråkuttryck!

A3. Definiera talföljden (x_n) med villkoren $x_1 = 3$ och

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \sqrt{x_n}).$$

(a) Visa att följden konvergerar genom att visa att den är nedåt begränsad och avtagande.

(b) Bestäm gränsvärdet av talföljden.

Lösning:

(a) Vi visar med induktion att talföljden har som nedre gräns (bland annat) talet 1. Med andra ord visar vi att $x_n \geq 1$ för varje $n \in \mathbb{N}$.

- Bassteg: Påståendet gäller då $n = 1$: $x_1 = 3 \geq 1$.
- Induktioaskel: Vi antar att påståendet gäller för något $k \in \mathbb{N}$ (alltså $x_k \geq 1$). Således gäller påståendet också då $n = k+1$: $x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + \sqrt{x_k}) \geq \frac{1}{2}(1+1) \geq 1$

Alltså är (x_n) nerifrån begränsad.

Till näst visar vi att $x_{n+1} \leq x_n$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}(x_n + \sqrt{x_n}) = \frac{x_n - \sqrt{x_n}}{2} \geq 0$$

Den sista uppskattningen följer från det att $a \geq \sqrt{a}$ för alla $a \geq 1$.

Nu har vi visat att x_n är nerifrån begränsad och minskande, alltså konvergerar den enligt sats 2.3.9.

(b) Till först gör vi några iakttagelser:

- Enligt (a)-delen vet vi att $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, där a är något reellt tal.
- Enligt förra veckans uppgifter vet vi att

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = a$$

- Enligt sats 2.2.8 och föregående veckans uppgift L1 gäller

$$\frac{1}{2}(x_n + \sqrt{x_n}) \to \frac{1}{2}(a + \sqrt{a})$$

  då $n \to \infty$.
- Likastorheten hålls vid gränsen, alltså

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \sqrt{x_n}) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(x_n + \sqrt{x_n})$$

Således gäller

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(x_n + \sqrt{x_n}) = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a}),$$

från vilket vi kan lösa a:

$$a = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a}) \quad \Longleftrightarrow \quad a = \sqrt{a} \quad \Longleftrightarrow \quad a = 1 \quad \text{tai} \quad a = 0$$

Värdet $a = 0$ kan förkastas, eftersom vi tidigare visade att $x_n \geq 1$ för alla $n \in \mathbb{N}$.[2] Alltså $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

---

[2] Gränsvärdet kan inte "hoppa"över intervallet $]0, 1[$!

A4. Bestäm $\inf A$ och $\sup A$, där

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2 \text{ eller } 3 < x < 4\}.$$

Lösning: Vi påstår att $\inf A = 1$ och $\sup A = 4$. Vi kollar dessa med hjälp av definitionerna för infimum och supremum.

$\inf A = 1$, eftersom:

- För alla $x \in A$ gäller $x \geq 1$, alltså är 1 en nedre gräns.
- Vilket som helst tal av formen $1 + h$, där $0 < h < 1$[3], kan inte vara en nedre gräns för A, eftersom exempelvis talet $1 + h/2$ är ett element i A. Alltså är 1 den största nedre gränsen, dvs infimum.

$\sup A = 4$, eftersom

- för alla $x \in A$ gäller $x \leq 4$, alltså är 4 en övre gräns
- Vilket som helst tal av formen $4 - h$, där $0 < h < 1$[3], kan inte vara en övre gräns för A, eftersom exempelvis talet $4 - h/2$ är ett element i A. Alltså är 4 den minsta nedre gränsen, dvs supremum.

A5. Anta att $x_n \to 3$ och $y_n \to \infty$ då $n \to \infty$. Visa att $x_n + y_n \to \infty$ då $n \to \infty$. Observera att kursen inte har någon sats som direkt kan tillämpas i detta fall. I uppgiften måste man därför arbeta utgående från definitionerna.

Lösning:

Tankar inför beviset: Som i uppgift A1, så vill vi uppskatta talföljdens termer neråt. Vi vill skriva

$$\text{"}x_n + y_n > M\text{"}$$

då M är något tidigare definierat godtyckligt reellt tal. Uppgiftens idé är att uppskatta skilt termerna x_n och y_n.

Till denna uppskattning använder vi oss av antaganden att $x_n \to 3$ och $y_n \to \infty$, alltså undersöker vi till först innehållet av dessa. Namnen för variablerna (ϵ, M, k osv.) har inte egentligen skillnad, så vi betecknar variablerna här för klarhets skull med lämpliga beteckningar.

- $x_n \to 3$ då $n \to \infty$ betyder enligt definitionen att för alla $\epsilon_x > 0$ hittas en sådan tröskel $k \in \mathbb{N}$, att $|x_n - 3| < \epsilon_x$ då $n > k$.
- $y_n \to \infty$ då $n \to \infty$ betyder enligt definitionen att för alla $M_y \in \mathbb{R}$ hittas en sådan tröskel $k \in \mathbb{N}$, att $y_n > M_y$ då $n > k$.

Bevis: Låt $M \in \mathbb{R}$.

Vi väljer $\epsilon_x = 1$. Då existerar ett sådant $k_x \in \mathbb{N}$, att $|x_n - 3| < 1$ då $n > k_x$. Då $n > k_x$, så gäller enligt absolutbeloppslemmat

$$|x_n - 3| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 < x_n - 3 < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2 < x_n < 4$$

Framförallt $x_n > 2$.

Vi väljer $M_y = M - 2$. Då existerar ett sådant $k_y \in \mathbb{N}$, att $y_n > M_y$ då $n > k_y$.

[3] Fundera på varför det krävs att $0 < h < 1$ och varför det räcker!

Till sist väljer vi $k = \max\{k_x, k_y\}$. Då $n > k$, är både $n > k_x$ och $n > k_y$ i kraft, så följande uppskattning gäller:

$$x_n + y_n > 2 + y_n > 2 + M_y = 2 + (M - 2) = M$$

Alltså gäller enligt definitionen att $x_n + y_n \to \infty$ då $n \to \infty$.