HU / Institutionen för Matematik och Statistik
Gränsvärden, hösten 2016
Övning 5 – Modellsvar

L1. Anta att $x_n > 0$ för alla n och att $x_n \to a$ då $n \to \infty$. Visa att

$$\sqrt{x_n} \to \sqrt{a}.$$

Lösning: Tankar inför beviset:

Vi uppskattar avståndet

$$\begin{aligned}
|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| &= \left| \frac{(\sqrt{x_n} + \sqrt{a})(\sqrt{x_n} - \sqrt{a})}{(\sqrt{x_n} + \sqrt{a})} \right| \\
&= \left| \frac{x_n - a}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} \right| \\
&= \frac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} \\
&\leq \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}}
\end{aligned}$$

Denna uppskattning gäller endast då $a \neq 0$. Vi undersöker fallet $a = 0$ senare skilt för sig.

Eftersom $x_n > 0$ för alla $n \in \mathbb{N}$, så $a \geq 0$.
Vi märker ekvivalensen:

$$\frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - a| < \sqrt{a}\varepsilon$$

Bevis för fallet $a > 0$:

Låt $\varepsilon > 0$. Vi väljer tröskeln $K \in \mathbb{N}$ så att det för alla $n > K$ gäller

$$|x_n - a| < \varepsilon\sqrt{a}.$$

Då gäller för alla $n > K$ att

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| \leq \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\sqrt{a}\varepsilon}{\sqrt{a}} = \varepsilon.$$

Alltså gäller $\sqrt{x_n} \to \sqrt{a}$, då $a > 0$.

Tankar inför beviset av $a = 0$:
Vi uppskattar avståndet

$$
\begin{aligned}
|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| &= |\sqrt{x_n} - 0| \\
&= |\sqrt{x_n}| \\
&= \sqrt{x_n}
\end{aligned}
$$

Vi mäker ekvivalensen:

$$\sqrt{x_n} < \varepsilon \Leftrightarrow x_n < \varepsilon^2$$

Bevis för fallet $a = 0$:

Låt $\varepsilon > 0$. Vi väljer tröskeln $K \in \mathbb{N}$ så att det för alla $n > K$ gäller $|x_n - 0| < \varepsilon^2$
Nu gäller för alla $n > K$ att

$$|\sqrt{x_n} - 0| = \sqrt{x_n} = \sqrt{|x_n - 0|} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

Alltså gäller $\sqrt{x_n} \to \sqrt{a}$ då $a = 0$.

Därmed gäller att $\sqrt{x_n} \to \sqrt{a}$.

L2. Vi antar att det är känt att

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$$

då $n \to \infty$. Bestäm på basen av detta och föregående uppgift

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n.$$

Lösning:

Enligt definitionen för talet e gäller

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Vi betecknar $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Till näst undersöker vi $y_n = (1 + \frac{1}{2n})^{2n}$. Denna talföljd är en delföljd av x_n, eftersom $y_n = x_{2n}$ för alla $n \in \mathbb{N}$. Eftersom x_n konvergerar mot gränsvärdet e, så gäller enligt sats 2.2.12 att även y_n konvergerar mot gränsvärdet e, alltså

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = e.$$

Att talföljden (y_n) konvergerar mot e kunde visas på samma vis som i uppgift A3.

Vi vill använda oss av denna information, så vi omformulerar uppgiftens term till en sådan form som innehåller termen vi vill ha:

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{\left(\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n\right)^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}}$$

Den första likheten gäller, eftersom det klart gäller $(1 + \frac{1}{2n})^n > 0$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

I uppgift L1 har vi visat att om $x_n > 0$ för alla $n \in \mathbb{N}$ och $x_n \to a$, då $n \to \infty$, så gäller $\sqrt{x_n} \to \sqrt{a}$, då $n \to \infty$. Med denna information kan vi komma fram till att

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}} \to \sqrt{e}, \text{ kun } n \to \infty.$$

L3. Visa att $n - \sqrt{n} \to \infty$ då $n \to \infty$.

Lösning:

Vi vill alltså visa att det för alla $M \in \mathbb{R}$ finns en tröskel $K \in \mathbb{N}_1$, så det för alla $n > K$ gäller att $n - \sqrt{n} > M$. Vi börjar alltså med att uppskatta uttrycket $n - \sqrt{n}$ neråt.

Tankar inför beviset:

Vi uppskattar uttrycket neråt:

$$n - \sqrt{n} = \sqrt{n}(\sqrt{n} - 1) \geq 1 \cdot (\sqrt{n} - 1) = \sqrt{n} - 1$$

Då $M \geq 0$, så märker vi ekvivalensen:

$$\sqrt{n} - 1 > M \Leftrightarrow n > (M + 1)^2$$

Bevis:

Låt $M \in \mathbb{R}$. Definiera $M' = \max(0, M)$. Vi väljer $K \in \mathbb{N}$ så att
$K \geq (1 + M')^2$.

Nu gäller för alla $n > K$ att:

$$n - \sqrt{n} \geq \sqrt{n} - 1 > \sqrt{K} - 1 \geq \sqrt{(1 + M')^2} - 1 = M' \geq M.$$

Alltså gäller $n - \sqrt{n} \to \infty$ då $n \to \infty$.

L4. Vi betraktar delmängden

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ och } x^2 < 5\}$$

av de reella talen. Visa att $a = \sup A$ existerar och att $a^2 = 5$. I uppgiften visar man alltså att existensen av talet $\sqrt{5}$ följer från axiomen för de reella talen.

Lösning:

Eftersom $1 \in A$, så är A icke-tom. Eftersom det för alla $x \in A$ gäller $x < 5$, så är A uppifrån begränsad. Enligt fullständighetsaxiomet existerar det för mängden A ett supremum $\sup A$. $\sup A > 0$, eftersom $1 \in A$ och $\sup A$ är övre gränsen för mängden A. Beteckna $a = \sup A$. Vi visar till näst att $a^2 = 5$, alltså att a är det reella talet vi söker efter. Beviset lyckas med att visa, att olikheterna $a^2 < 5$ och $a^2 > 5$ leder till motstridigheter.

Anta till först att $a^2 < 5$. Nu om vi hittar ett tal $h > 0$, för vilket gäller $(a+h)^2 < 5$, så är $a + h \in A$ och $a + h > a$, vilket ger att a inte kan vara den övre gränsen för mängden A och därmed inte heller ett supremum. Vi börjar leta efter ett sådant tal h. Nu om $0 < h < 1$, så

$$(a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2 < a^2 + 2ah + h = a^2 + h(2a+1)\,.$$

Vi märker ekvivalensen

$$a^2 + h(2a+1) < 5 \iff h < \frac{5-a^2}{2a+1}\,.$$

Vi vill alltså välja ett h, som är mindre än talet $\frac{5-a^2}{2a+1}$. Vi väljer hälften av detta tal, alltså $h = \min\left\{\frac{1}{2}\frac{5-a^2}{2a+1}, \frac{1}{2}\right\}$ (vi tar minimit av dessa två tal, eftersom vi också vill försäkra oss om att $h < 1$ gäller). Nu följer det att

$$(a+h)^2 < a^2 + h(2a+1) \leq a^2 + \frac{1}{2}(5-a^2) = \frac{a^2+5}{2} < \frac{5+5}{2} = 5\,.$$

Alltså gäller $(a+h)^2 < 5$, vilket ger att $a+h \in A$ och $a+h > a$. Eftersom $a = \sup A$, så är detta en motsägelse enligt definitionen av supremumet, eftersom a inte nu är den övre gränsen för mängden A.

Anta sedan att $a^2 > 5$. Nu om vi hittar ett tal $h > 0$, för vilket gäller $(a-h)^2 > 5$, så är $a-h$ en övre gräns för A och$a - h < a$, vilket ger att a inte kan vara den **minsta** övre gränsen av A. Vi börjar leta efter ett sådant tal h. För alla $h > 0$ gäller

$$(a-h)^2 = a^2 - 2ah + h^2 > a^2 - 2ah\,.$$

Vi märker ekvivalensen

$$a^2 - 2ah > 5 \iff h < \frac{a^2-5}{2a}\,.$$

Alltså vill vi välja ett h,som är mindre än talet $\frac{a^2-5}{2a}$. Vi tar hälften av detta tal, alltså väljer vi $h = \frac{1}{2}\frac{a^2-5}{2a} > 0$. Nu följer att

$$(a-h)^2 > a^2 - 2ah = a^2 - \frac{a^2-5}{2} = \frac{a^2+5}{2} > \frac{5+5}{2} = 5\,.$$

Alltså gäller $a-h < a$ och $a-h$ är en övre gräns för mängden A. Eftersom $a = \sup A$, så är detta en motsägelse med definitionen av supremumet, eftersom a inte nu är den **minsta** övre gränsen av A.

Således är a ett positivt reellt tal för vilket det gäller varken $a^2 < 5$ eller $a^2 > 5$. Därmed måste det gälla att $a^2 = 5$, alltså $a = \sqrt{5}$.

L5. Visa att talföljden i uppgift A4 konvergerar.

Lösning: Selvästi $x_n > 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Vi visar till först att talföljden (x_n), som är definierad med kraven $x_1 = 3$ och

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right)$$

då $n = 1, 2, \ldots$, är avtagande.

Talföljden (x_n) är avtagande omm $x_{n+1} - x_n \leq 0$ för alla $n \in \mathbb{N}$. Vi undersöker alltså differensen mellan två påföljande termer i följden:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right) - x_n = -\frac{x_n}{2} + \frac{5}{2x_n} = \frac{5 - {x_n}^2}{2x_n}$$

Vi bör uppskatta termen x_n^2 så att differensen ovan blir negativ

$$\begin{aligned}
x_{n+1}^2 &= \left(\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right)\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(x_n^2 + 10 + \frac{25}{x_n^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(x_n^2 + 10 - 20 + 20 + \frac{25}{x_n^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(x_n - 10 + \frac{25}{x_n^2} + 20\right) \\
&= \frac{1}{4}\left((x_n - \frac{5}{x_n})^2 + 20\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(x_n - \frac{5}{x_n}\right)^2 + 5 \\
&\geq 5
\end{aligned}$$

Enligt ekvationskedjan får vi att $x_{n+1}^2 \geq 5$. Dessutom gäller $x_1^2 = 9$, alltså gäller $x_n^2 \geq 5$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

Därmed gäller för alla $n \in \mathbb{N}$ att

$$x_{n+1} - x_n = \frac{5 - {x_n}^2}{2x_n} \leq 0$$

Alltså är talföljden (x_n) avtagande.

Nu gäller enligt sats 2.3.9 att (x_n) antingen konvergerar, eller avtar obegränsat. Eftersom $x_n > 0$ för alla $n \in \mathbb{N}$, så avtar följden (x_n) inte obegränsat. Eftersom (x_n) inte avtar obegränsat, så måste den konvergera.