HU / Institutionen för Matematik och Statistik
Gränsvärden, hösten 2016
Övning 5 – Modellsvar

A1. Bestäm

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+1}$$

på basen av kursens kunskaper. Motivera ditt resultat noggrant. Observera strukturen "om …, så … " i Sats 2.2.8 i kursboken. I uppgiften får man använda kunskap om grärdet av konstanta talföljder och följden $(\frac{1}{n})$.

Lösning: Vi omformulerar uppgiftens bråkuttryck till en lättare uppskattbar form genom att ta n som en gemensam faktor som sedan kan förkortas bort,

$$\frac{2n+1}{3n+1} = \frac{n(2+\frac{1}{n})}{n(3+\frac{1}{n})} = \frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}}$$

Vi tar reda på uttryckets gränsvärde då $n \to \infty$ med hjälp av Sats 2.2.8. Eftersom det gäller att $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ och att en konstant talföljds gränsvärde är konstanten själv, gäller det enligt Sats 2.2.8 att

$$\lim_{n\to\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2 + 0 = 2$$

Motsvarligen gäller

$$\lim_{n\to\infty} 3 + \frac{1}{n} = 3 + 0 = 3$$

Nu eftersom $3 + \frac{1}{n} \neq 0$ för alla $n \in \mathbb{N}_1$ och $\lim_{n\to\infty} 3 + \frac{1}{n} \neq 0$, så kan vi använda Sats 2.2.8. för att räkna gränsvärdet för kvoten av följderna $2 + \frac{1}{n}$ och $3 + \frac{1}{n}$, alltså

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{2}{3},$$

och därmed är det sökta gränsvärdet $\frac{2}{3}$.

A2. Bestäm

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{3n^3+1}$$

på basen av kursens kunskaper. Motivera ditt resultat noggrant. Observera strukturen "om …, så … " i Sats 2.2.8 i kursboken. I uppgiften får man använda kunskap om gränsvärdet av konstanta talföljder och följden $(\frac{1}{n})$.

Lösning: Vi omformulerar uppgiftens bråkuttryck till en lättare uppskattbar form genom att ta n^3 som en gemensam faktor som sedan kan förkortas bort,

$$\frac{2n^2+1}{3n^3+1} = \frac{n^3(\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3})}{n^3(3+\frac{1}{n^3})} = \frac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}}{3+\frac{1}{n^3}}$$

Vi gör följande gränsvärdesuppskattningar med hjälp av Sats 2.2.8. och det att $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 2 \cdot 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}\right) = 0 + 0 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(3 + \frac{1}{n^3}\right) = 3 + 0.$$

Eftersom gränsvärdet vid det sista skedet inte är 0 och $3 + \frac{1}{n^3} \neq 0$ för alla $n \in \mathbb{N}_1$, så kan vi använda Sats 2.2.8 på uppgiftens kvot, alltså

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}}{3 + \frac{1}{n^3}} = \frac{0}{3} = 0,$$

och därmed är det sökta gränsvärdet 0.

A3. Anta att $x_n \to a$ då $n \to \infty$.

(a) Definiera y_n med ekvationen $y_n = x_{n^2}$. Visa att $y_n \to a$ då $n \to \infty$.

(b) Definiera z_n med ekvationen $z_0 = 42$ och $z_n = x_{n-1}$ kun $n > 1$. Visa att $z_n \to a$ då $n \to \infty$.

Lösning: (a) Vi påminner oss om gränsvärdets definition, dvs

$\lim_{n\to\infty} x_n = a$, om det för alla $\epsilon > 0$ finns ett $k \in \mathbb{N}_1$ så det för alla $n > k$, gäller $|x_n - a| < \epsilon$

Vi oss genom att använda definitionen att $\lim_{n\to\infty} y_n = a$. Vi undersöker avståndet mellan gränsvärdet $a$och följden y_n,

$$|y_n - a| = |x_{n^2} - a|$$

Om $k \in \mathbb{N}_1$ är ett sådant tal att det för alla naturliga tal $n > k$ gäller $|x_n - a| < \epsilon$, så följer det att $|x_{n^2} - a| < \epsilon$. Dett kan motiveras med att

$$n^2 \geq n > k \implies n^2 > k$$

Alltså $|y_n - a| < \epsilon$ om $n > k$, där k är ett tal så att $|x_n - a| < \epsilon$ om $n > k$. Ett sådant tal k kan hittas eftersom följden x_n har som gränsvärde a. Vi formulerar ännu beviset.
Bevis: Låt $\epsilon > 0$, välj k så det för alla $n > k$ gäller

$$|x_n - a| < \epsilon$$

Eftersom $n^2 > k$, då $n > k$, så gäller även

$$|x_{n^2} - a| < \epsilon,$$

alltså har följden x_{n^2} gränsvärdet a.
(b) Vi undersöker avståndet mellan gränsvärdet a och följden z_n, med antagandet att $n > 1$

$$|z_n - a| = |x_{n-1} - a|$$

Om $k \in \mathbb{N}_1$ är ett sådant tal att det för alla $n > k$ gäller $|x_n - a| < \epsilon$, så gäller även om $n > k + 1$, att $|x_n - a| < \epsilon$, för alla $n > k + 1$. Vi märker ekvivalensen

$$n > k + 1 \iff n - 1 > k,$$

av vilket vi märker att om $n-1>k$, så $|x_{n-1}-a|<\epsilon$.
Bevis: Låt $\epsilon>0$, välj k så det för alla $n>k$ gäller

$$|x_n-a|<\epsilon$$

Om $n>k+1$, så gäller även

$$|x_n-a|<\epsilon$$

Alltså om $n-1>k$, så

$$|x_{n-1}-a|<\epsilon$$

Om vi dessutom kräver att $k>1$, så konvergerar följden z_n mot värdet a.

A4. Man betraktar talföljden (x_n) definierad av villkoren $x_1=3$ och

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{5}{x_n}\right)$$

då $n=1,2,\ldots$. Anta att det är känt att det finns ett reellt tal a, för vilken gäller att $x_n\to a$ då $n\to\infty$. Bestäm det enda möjliga värdet på talet a. Följer det av uppgiftens argument att vi samtidigt har visat att följden (x_n) konvergerar?

Lösning: Vi antar att det finns ett gränsvärde, alltså $\lim_{n\to\infty}x_n=a$. Vi undersöker uppgiftens rekursiva uttryck,

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{5}{x_n}\right),$$

Eftersom ekvationens högra och vänstra led är lika stora för alla $n\in\mathbb{N}_1$, så är även deras gränsvärden lika stora, om de existerar. Vi antog att följden x_n har gränsvärdet a, så vi får

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{5}{x_n}\right).$$

Vi märker att alla termerna i talföljden x_n är positiva. Följdens första term $x_1=3$ är positiv. Vi visar att om någon term i talföljden x_m är positiv, så är också x_{m+1} positiv, alltså gör vi ett induktionssteg. Eftersom vi antog att $x_m>0$, så gäller det $\frac{1}{2}x_m>0$ och $\frac{5}{2x_m}>0$, alltså gäller för summan $\frac{1}{2}x_m+\frac{5}{2x_m}>0$, vilket enligt definitionen av x_n är ekvivalent med det att $x_{m+1}>0$. Alltså är alla termerna i följden positiva.

Vi undersöker gränsvärdet $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{5}{x_n}\right)$ med hjälp av Sats 2.2.8. Eftersom $x_n>0$ och $\lim_{n\to\infty}x_n=a$, så vet vi att

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5}{x_n}=\frac{5}{a},$$

om vi dessutom antar att $a\neq 0$. För summan är gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty}x_n+\frac{5}{x_n}=a+\frac{5}{a}$$

Då vi märker att $\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=a$, så får vi för ekvationens gränsvärde a att

$$a=\frac{1}{2}\left(a+\frac{5}{a}\right)$$

Vi kan omformulera ekvationen ovan till en andragrads ekvation genom att multiplicera med talet a,

$$a^2=\frac{1}{2}a^2+\frac{5}{2}$$

$$\iff \frac{1}{2}a^2 = \frac{5}{2}$$
$$\iff a^2 = 5,$$

alltså gäller antingen $a = \sqrt{5}$ eller $a = -\sqrt{5}$. Eftersom vi tidigare visade att $x_n > 0$, så är det enda möjliga värdet för gränsvärdet $\sqrt{5}$. Vi antog tidigare att $a \neq 0$. Nu motiverar vi varför $a = 0$ inte kan vara ett gränsvärde. Vi undersöker rekursionsformeln och märker ekvivalensen

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right) \iff x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n = \frac{5}{2x_n}$$

Eftersom följden x_n konvergerar, så konvergerar också följden $x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n$ enligt Sats 2.2.8. Om $a = 0$, så

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n = 0 - \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$

Alltså borde det gälla att följden $\frac{5}{2x_n}$ också konvergerar, eftersom alla termerna i följderna $x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n$ och $\frac{5}{2x_n}$ är lika stora. Men om $a = 0$, så har följden $\frac{5}{2x_n}$ inget gränsvärde. Alltså måste det gälla att $a \neq 0$. I beviset använde vi oss av Sats 2.2.8, där det krävs att gränsvärdet existerar. Därmed vet vi inte ännu om talföljdens gränsvärde är $\sqrt{5}$.

A5. Man definierar att talföljden (x_n) växer obegränsat (dvs. går mot ∞), om det mot varje reellt tal M finns en tröskel $K \in \mathbb{N}_1$, så att för varje $n > K$ gäller att $x_n > M$. Detta betecknas

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

eller synonymt också

$$x_n \to \infty \text{ då } n \to \infty.$$

Visa att

$$\frac{n^2+1}{n+1} \to \infty \text{ då } n \to \infty.$$

Tips: uppskatta talföljdens term $x_n = \frac{n^2+1}{n+1}$ nedåt till ett enklare uttryck, för vilket det är lätt att lösa hur stort indexet n bör vara för att $x_n > M$.

Lösning: Vi uppskattar uppgiftens bråkuttryck neråt genom att subtraherar med talet 1 i täljaren,

$$\frac{n^2+1}{n+1} \geq \frac{n^2}{n+1},$$

och

$$\frac{n^2}{n+1} \geq \frac{n^2}{n+n} \geq \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2},$$

där vi använde uppskattningen $n \geq 1$. Vi undersöker när $\frac{n}{2} > M$ och märker ekvivalensen

$$\frac{n}{2} > M \iff n > 2M,$$

alltså väljder vi K så att $K \geq 2M$ ovh $K \in \mathbb{N}_1$. Vi skriver till slut beviset för påståendet att $\frac{n^2+1}{n+1} \to \infty$ då $n \to \infty$.

Bevis: Vi visade redan att det gäller

$$\frac{n^2+1}{n+1} \geq \frac{n}{2}$$

Om K är ett positivt heltal så att $K > 2M$, och vi antar att $n > K$, så får vi olikheten

$$\frac{n^2+1}{n+1} \geq \frac{n}{2} > \frac{K}{2} \geq \frac{2M}{2} = M,$$

så gäller därmed $\frac{n^2+1}{n+1} > M$. Eftersom vi i uppskattningen inte gjorde något antagande gällande talet M, så hittas för alla reella talen M ett K så att om $n > K$ så $x_n > M$. Alltså gäller det enligt definitionen att talföljden x_n växer obegränsat.