HU / Institutionen för Matematik och Statistik
Gränsvärden, hösten 2016
Övning 4L – Modellsvar

L1. Utred

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n^2+3n+4}{4n^3+3n^2+2n+1}$$

med hjälp av kursens kunskaper om gränsvärdet av talföljder.

Lösning: Vi börjar med att omformulera talföljden till en användbarare form för detta fall

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n^2+3n+4}{4n^3+3n^2+2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^3})}{n^3(4+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^3}}{4+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}.$$

Enligt definitionen för gränsvärdet av en talföljd kan vi lätt visa att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ och } \lim_{n\to\infty} a = a,$$

då a är något reellt tal, så dessa antas vara kända. Nu gäller enligt bokens sats 2.2.8 och de tidigare resultaten att följande gränsvärden existerar:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right) = 0\cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n}\right) = 0\cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(2\cdot\frac{1}{n}\right) = 2\cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(3\cdot\frac{1}{n}\right) = 3\cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(3\cdot\frac{1}{n^2}\right) = 3\cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(2\cdot\frac{1}{n^2}\right) = 2\cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n^3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(4\cdot\frac{1}{n^3}\right) = 4\cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1\cdot\frac{1}{n^3}\right) = 1\cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^3}\right) = 1+0+0+0 = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right) = 4+0+0+0 = 4.$$

Nu eftersom

$$4+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3} \neq 0 \text{ ja } 4 \neq 0,$$

för alla de naturliga talen $n = 1, 2, 3\ldots$, kan vi vidare tillämpa sats 2.2.8 för att få

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n^2+3n+4}{4n^3+3n^2+2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^3}}{4+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{4}.$$

L2. Man betraktar talföljderna (x_n) och (y_n).

(a) Anta att båda divergerar. Vad vet man om konvergensen eller divergensen av följden $(x_n + y_n)$?

(b) Anta att följden (x_n) konvergerar och följden (y_n) divergerar. Vad vet man om konvergensen eller divergensen av av följden $(x_n + y_n)$?

(c) Anta att $x_n \to a$ då $n \to \infty$ samt att följden (y_n) divergerar. Anta dessutom att $x_n \neq 0$ för alla $n \in \mathbb{N}_1$. Vad vet man om konvergensen eller divergensen av följden $(x_n y_n)$?

Lösning: (a) Om konvergensen av summaföljden $(x_n + y_n)$ kan vi inte säga något. Vi väljer först exempelvis (x_n) genom att låta $x_n = (-1)^n$ och $y_n = x_n$. Alltså kommer följden (x_n) att växla mellan -1 och 1 och konvergerar därmed inte. Då gäller $(x_n + y_n) = (x_n + x_n) = 2(x_n)$ alltså kommer summaföljden att växla mellan -2 och 2 och konvergerar därmed inte.

Men, om man istället väljer (x_n) såsom ovan, men låter istället $y_n = -x_n$ så får man som summaföljd $x_n + y_n = x_n - x_n = 0$, som är en konstant följd med gränsvärdet 0. Även i detta fall kommer (y_n) att växla mellan -1 och 1, men i annan "takt"än (x_n), vilket leder till att följdernas termer tar ut varandra.

Alltså kan summaföljden i detta fall beroende på hur man väljer följderna konvergera eller divergera.

(b) Om (x_n) konvergerar och (y_n) divergerar, så kan vi visa att summaföljden $(x_n + y_n)$ divergerar. Vi bevisar detta genom att göra ett motantagande.

Vi antar att följden $(x_n + y_n)$ konvergerar mot talet $b \in \mathbb{R}$. Å andra sidan vet vi enligt uppgiftsgivningen att (x_n) konvergerar också mot något tal $a \in \mathbb{R}$. Vi visar, att följden (y_n) konvergerar mot talet $b - a$, av vilket vi får en motstridighet.

Sätt 1

Vi vet att (x_n) konvergerar mot något tal $a \in \mathbb{R}$, så $(-x_n)$ konvergerar mot talet $-a \in \mathbb{R}$. Nu

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} (y_n + x_n - x_n) = \lim_{n\to\infty} ((y_n + x_n) + (-x_n)) = b + (-a) = b - a.$$

Enligt sats 2.2.8 fick vi nu ett gränsvärde för (y_n), vilket strider emot de ursprungliga antaganden. Alltså är motantagandet falskt och därmed måste summaföljden $(x_n + y_n)$ divergera.

Sätt 2

Låt $\varepsilon > 0$. Enligt antaganden och definitionen för gränsvärdet hittas det en tröskel $k \in \mathbb{N}$, för vilken gäller

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

och

$$|x_n + y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2},$$

då $n > k$. Då gäller

$$\begin{aligned}
|y_n - (b-a)| &= |y_n + x_n - x_n - b + a| \\
&= |(y_n + x_n) - b + a - x_n| \\
&\leq |(y_n + x_n) - b| + |a - x_n| \\
&= |(y_n + x_n) - b| + |x_n - a| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

där den första olikheten följer från triangelolikheten. Därmed följer från definitionen av gränsvärdet att följden (y_n) konvergerar mot talet $b-a$, men detta är en motstridighet, eftersom följden (y_n) antogs divergera. Alltså är motantagandet falskt och summaföljden $(x_n + y_n)$ måste divergera.

(c) Även i detta fall kan följden antingen konvergera eller divergera. Som divergerande fall går exempelvis $x_n = 1$ och $y_n = n$. Då gäller $x_n y_n = n = y_n$, alltså kommer följden $(x_n y_n)$ att divergera, eftersom följden (y_n) divergerar.

Det konvergerande fallet får vi genom att välja exempelvis $x_n = 1/n$, vilket ger att $(x_n) \to 0$, då $n \to \infty$ och $y_n = n$. Då gäller $x_n y_n = 1$ för alla n, så följden $(x_n y_n)$ är en konstantföljd, som konvergerar mot talet 1.

L3. Sök upp Bernoullis olikhet från kursboken och utred vad olikheten säger. Visa noggrant med hjälp av Bernoullis olikhet att

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

För att tillämpa Bernoullis olikhet lönar det sig att skriva

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{1 + (\frac{3}{2} - 1)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}.$$

Lösning:

Enligt Bernoullis olikhet gäller det för de reella talen $x > -1$ och naturliga talen $n = 1, 2, 3, \ldots$ att

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Vi visar påståendet genom att använda definitionen för gränsvärdet. Vi börjar med att modifiera uttrycket

$$\left|\left(\frac{2}{3}\right)^n - 0\right|,$$

då $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\left(\frac{2}{3}\right)^n - 0\right| = \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^n}.$$

Vi märker att antaganden för Bernoullis olikhet är i kraft ($\frac{1}{2} > -1, n = 1, 2, 3, \ldots$), så uttrycket kan uppskattas uppåt med hjälp av den:

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^n} \leq \frac{1}{1 + \frac{n}{2}} < \frac{1}{\frac{n}{2}} = \frac{2}{n}.$$

Vi märker ekvivalensen:

$$\frac{2}{n} \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{2}{\varepsilon}$$

Nu kan vi formulera beviset.

Låt $\varepsilon > 0$. Vi väljer k att vara det minsta naturliga talet, för vilket $k \geq \frac{2}{\varepsilon}$. Således

$$\left|\left(\frac{2}{3}\right)^n - 0\right| = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^n} \leq \frac{1}{1+\frac{n}{2}} < \frac{1}{\frac{n}{2}} = \frac{2}{n} < \frac{2}{k} \leq \frac{2}{\frac{2}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

för alla $n > k$. Alltså gäller enligt definitionen för gränsvärdet att

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

L4. I definitionen av gränsvärdet av talföljder förekommer ”kvantorraden”

$$\forall \epsilon > 0\, \exists K \in \mathbb{N}_1\, \forall n > K.$$

Ett sätt att få en känsla för definitionen är att fundera på andra ’kvantorrader”. Utred vad följande ’kvantorrader” säger om talföljden (x_n).

(a) $\exists K \in \mathbb{N}_1 \forall \varepsilon > 0\, \forall n > K : |x_n - a| < \epsilon$,

(b) $\exists K \in \mathbb{N}_1 \exists \varepsilon > 0\, \forall n > K : |x_n - a| < \epsilon$.

Lösning:
(a) Vi skriver formulerar kravet ifråga med ord: det existerar ett sådant naturligt tal K, att det för alla positiva epsilon och alla $n > K$ gäller att avståndet från talföljden och punkten a är mindre än epsilon. Således är alla talföljdens termer efter ett visst index “obegränsat nära” talet a, alltså är följden (x_n) efter detta index en konstantföljd och $x_n = a$. Det är bra att märka att (a) -kravet är ett starkare krav än vad som gäller för det vanliga gränsvärdet och därmed följer det att a är gränsvärdet av följden x_n.

(b) Nu gäller enligt kravet att det existerar ett sådant naturligt tal K och ett sådant positivt epsilon, att det för alla index större än K gäller att termens avstånd från punkten a är mindre än epsilon. Efter någon tröskel kan avståndet alltså inte vara större än något visst epsilon, med andra ord är talföljden begränsad efter detta index inom intervallet $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Om existensen av talföljdens gränsvärde går det däremot inte att säga någonting. Om vi skulle veta att talföljden har ett gränsvärde, så skulle b)-kravet följa från definitionen för gränsvärdet.

L5. Anta att $x_n \to a$ då $n \to \infty$, och att $a \neq 0$. Visa att det finns ett sådant $K \in \mathbb{N}_1$, att för varje $n > K$ gäller att

$$|x_n| > \frac{1}{2}|a|.$$

Använd triangelolikheten nedåt, och vid behov kan fallen $a > 0$ och $a < 0$ diskuteras separat. (Ovanstående faktum behövs exempelvis när man visar kvotregeln för gränsvärdet av talföljder.)

Lösning: Vi tar och undersöker enligt det andra tipset fallen $a > 0$ och $a < 0$ skilt. Vi antar till först att $a > 0$. Rita en bild! Då gäller $\frac{a}{2} > 0$,alltså hittas ett sådant $K \in \mathbb{N}_1$, att det för alla $n > K$ gäller

$$|x_n - a| < \frac{a}{2},$$

eftersom följden x_n konvergerar mot talet a. Enligt absolutbeloppslemmat gäller

$$-\frac{a}{2} < x_n - a < \frac{a}{2},$$

och genom att vidare undersöka den vänstra olikheten och addera talet a ledvis får vi

$$\frac{a}{2} < x_n.$$

Eftersom $x_n \leq |x_n|$ och $-|x_n| \leq 0$ gäller det att

$$-|x_n| \leq 0 < \frac{a}{2} < x_n \leq |x_n|$$

alltså

$$-|x_n| < \frac{a}{2} < |x_n|.$$

Från absolutbeloppslemmat följer det nu att $|x_n| > \frac{1}{2}|a|$.

Till näst antar vi att $a < 0$ och vi framskrider på samma vis som ovan. Nu gäller $-\frac{a}{2} > 0$, så det hittas ett sådant $K \in \mathbb{N}_1$, att det för alla $n > K$ gäller

$$|x_n - a| < -\frac{a}{2}.$$

Enligt absolutbeloppslemmat gäller

$$\frac{a}{2} < x_n - a < -\frac{a}{2},$$

och genom att vidare undersöka den högra olikheten och addera talet a ledvis får vi

$$x_n < \frac{a}{2}.$$

Särskilt alltså $x_n < 0$, så $|x_n| = -x_n$ alltså $-|x_n| = x_n$. Dessutom, eftersom $|x_n| \geq 0$ så gäller

$$-|x_n| = x_n < \frac{a}{2} < 0 \leq |x_n|$$

alltså

$$-|x_n| < \frac{a}{2} < |x_n|.$$

Från absolutbeloppslemmat följer än en gång att $|x_n| > \frac{1}{2}|a|$.

Således har vi visat att påståendet gäller. Oundvikligen väcker frågan, varför antog vi i början att $a \neq 0$? Som motexempel duger en konstantföljd, vars termer har alla värdet 0.