HU / Institutionen för Matematik och Statistik
Gränsvärden, hösten 2016
Övning 4 – Modellsvar

A1. Visa med hjälp av definitionen för gränsvärdet av en talföljd att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{2n+3} = \frac{1}{2}$$

gäller.

Lösning: Enligt definitionen för gränsvärdet av en talföljd gäller $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+3}{2n+3} = \frac{1}{2}$, omm det för alla $\varepsilon > 0$ hittas en sådan tröskel k, att det för alla $n > k$ gäller $\left|\dfrac{n+3}{2n+3} - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$.

Vi börjar med att undersöka avståndet mellan talföljdens medlemmar och det föreslagna gränsvärdet:

$$\left|\frac{n+3}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n+6}{4n+6} - \frac{2n+3}{4n+6}\right| = \left|\frac{3}{4n+6}\right|$$

Eftersom talen n antas vara positiva heltal, så är täljaren och nämnaren ovan positiva. Alltså

$$\left|\frac{3}{4n+6}\right| = \frac{3}{4n+6},$$

vilket vidare kan uppskattas uppåt genom att minska på nämnaren, eftersom:

$$\frac{3}{4n+6} \leq \frac{3}{4n}.$$

Vi märker ekvivalensen:

$$\frac{3}{4n} < \varepsilon \iff n > \frac{3}{4\varepsilon}$$

Vi formulerar efter tänkandet ännu det egentliga beviset:
Låt $\varepsilon > 0$. Vi väljer som tröskel ett sådant heltal k, att $k \geq \frac{3}{4\varepsilon}$. Nu gäller för alla $n > k$ enligt tidigare att:

$$\left|\frac{n+3}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n+6}{4n+6} - \frac{2n+3}{4n+6}\right| = \left|\frac{3}{4n+6}\right| = \frac{3}{4n+6} \leq \frac{3}{4n} < \frac{3}{4k} \leq \varepsilon$$

Alltså gäller enligt definitionen för gränsvärdet av en talföljd att $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+3}{2n+3} = \frac{1}{2}$.

A2. Visa med hjälp av definitionen för gränsvärdet av en talföljd att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^2+3} = 0$$

gäller.

Lösning: Enligt definitionen för gränsvärdet av en talföljd gäller $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^2+3} = 0$, omm det för alla $\varepsilon > 0$ hittas en sådan tröskel k, att det för alla $n > k$ gäller $\left|\dfrac{n+3}{n^2+3} - 0\right| < \varepsilon$.

Vi märker att:

$$\left|\frac{n+3}{n^2+3}-0\right| = \left|\frac{n+3}{n^2+3}\right|$$

Eftersom talen n antas vara positiva heltal, så är täljaren och nämnaren ovan positiva. Alltså

$$\left|\frac{n+3}{n^2+3}\right| = \frac{n+3}{n^2+3},$$

vilket vidare kan uppskattas uppåt genom att minska på nämnaren och förstora täljaren, eftersom:

$$\frac{n+3}{n^2+3} \leq \frac{n+3}{n^2} \leq \frac{n+3n}{n^2} = \frac{4}{n}.$$

Vi märker ekvivalensen:

$$\frac{4}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{4}{\varepsilon}$$

Vi formulerar efter tänkandet ännu det egentliga beviset:
Låt $\varepsilon > 0$. Vi väljer som tröskel ett sådant heltal k, att $k \geq \frac{4}{\varepsilon}$. Nu gäller det för alla $n > k$ enligt tidigare att:

$$\left|\frac{n+3}{n^2+3}-0\right| = \left|\frac{n+3}{n^2+3}\right| = \frac{n+3}{n^2+3} \leq \frac{n+3}{n^2} \leq \frac{n+3n}{n^2} = \frac{4}{n} < \frac{4}{k} \leq \varepsilon$$

Alltså gäller enligt definitionen för gränsvärdet av en talföljd att $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^2+3} = 0$.

A3. Visa med hjälp av definitionen för gränsvärdet av en talföljd att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{2n+3} = 1$$

inte gäller.

Lösning: Enligt definitionen för gränsvärdet av en talföljd gäller $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+3}{2n+3} = 1$, omm det för alla $\varepsilon > 0$ hittas en sådan tröskel k, att det för alla $n > k$ gäller att $\left|\frac{n+3}{2n+3}-1\right| < \varepsilon$.

Vi börjar med att undersöka avståndet mellan talföljdens medlemmar och det föreslagna gränsvärdet:

$$\left|\frac{n+3}{2n+3}-1\right| = \left|\frac{n+3}{2n+3}-\frac{2n+3}{2n+3}\right| = \left|\frac{-n}{2n+3}\right|.$$

Talen n antas vara positiva heltal, så $-n < 0$ och $2n+3 > 0$. Alltså,

$$\left|\frac{-n}{2n+3}\right| = \frac{n}{2n+3}$$

Nu kan vi uppskatta avståndet **neråt** genom att förstora nämnaren, nämligen:

$$\frac{n}{2n+3} \geq \frac{n}{2n+3n} = \frac{1}{5}$$

Eftersom vi hittade en större nedre gräns än noll för avståndet, som inte är beroende av n, så vet vi att inget av talföljdens medlemmar har kortare avstånd till det föreslagna gränsvärdet än denna nedre gräns.

Låt nu $\varepsilon = \frac{1}{5}$. Vi vet nu att det för alla $n = 1, 2, 3 \ldots$ gäller

$$\left|\frac{n+3}{2n+3} - 1\right| \geq \frac{1}{5}.$$

Alltså kan vi inte hitta en tröskel k så att $\left|\frac{n+3}{2n+3} - 1\right| < \frac{1}{5}$. Därmed är påståendet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{2n+3} = 1$$

on falskt.

A4. Är påståendet

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^4+n} - \sqrt{n^4+1}) = 0$$

sant? Ge svar på basen av definitionen för gränsvärdet av en talföljd. (I uppgiften får man använda kunskapen att varje $x \geq 0$ har en kvadratrot, samt att för icke-negativa tal gäller: kvadratroten av ett större tal är större. Hur kan detta motiveras?)

Lösning: Enligt definitionen för gränsvärdet av en talföljd gäller $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^4+n} - \sqrt{n^4+1}) = 0$, omm det för alla $\varepsilon > 0$ hittas en sådan tröskel k, för vilket $\left|\sqrt{n^4+n} - \sqrt{n^4+1} - 0\right|$ ε, då $n > k$.

Vi börjar med att undersöka avståndet mellan talföljdens medlemmar och det föreslagna gränsvärdet:

$$\left|\sqrt{n^4+n} - \sqrt{n^4+1} - 0\right| = \left|\sqrt{n^4+n} - \sqrt{n^4+1}\right| = \sqrt{n^4+n} - \sqrt{n^4+1}$$

I det sista skedet användes tipset om icke-negativa reella tals storleksordning under kvadratrötter: $\sqrt{n^4+n} > \sqrt{n^4+1}$.

Till näst uppskattar vi differensen uppåt då man först förlänger den med termen $\sqrt{n^4+n} + \sqrt{n^4+1}$ och genom att sedan minska på nämnaren och förstora täljaren:

$$\sqrt{n^4+n} - \sqrt{n^4+1} = \frac{n^4+n-n^4-1}{\sqrt{n^4+n}+\sqrt{n^4+1}} = \frac{n-1}{\sqrt{n^4+n}+\sqrt{n^4+1}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4}} = \frac{1}{n}$$

Nu ser vi att för alla $n > \frac{1}{\varepsilon}$ är differensen mindre än $\varepsilon > 0$.

Vi formulerar ännu det egentliga beviset:
Låt $\varepsilon > 0$. Vi väljer en tröskel $k \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Nu gäller för alla $n > k$ enligt tidigare att:

$$\left|\sqrt{n^4+n} - \sqrt{n^4+1} - 0\right| \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{k} < \varepsilon$$

Alltså är påståendet sant enligt definitionen för gränsvärdet av en talföljd.

A5. Man antar att talföljderna (x_n) och (y_n) satisfierar följande villkor:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

och

$$\text{för alla } n \in \mathbb{N}_1 \text{ gäller att } |y_n| \leq 5.$$

Visa att

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0.$$

Lösning: Enligt definitionen för gränsvärdet av en talföljd gäller $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$, omm det för varje $\varepsilon > 0$ hittas en sådan tröskel k, för vilket $|x_n y_n - 0| < \varepsilon$, då $n > k$.

Vi börjar med att undersöka avståndet mellan talföljdens medlemmar och det föreslagna gränsvärdet:

$$|x_n y_n - 0| = |x_n y_n| = |x_n||y_n| \leq 5|x_n|.$$

Vi märker ekvivalensen:

$$5|x_n| < \varepsilon \iff |x_n| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Vi vet att $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, så för det positiva talet $\frac{\varepsilon}{5}$ hittas en sådan tröskel k, att det för alla $n > k$ gäller $|x_n - 0| < \frac{\varepsilon}{5}$.

Vi formulerar efter tänkandet ännu det egentliga beviset:

Låt $\varepsilon > 0$. Vi väljer tröskeln k så att $|x_n - 0| < \frac{\varepsilon}{5}$ för alla $n > k$.

För den valda tröskeln k gäller för alla $n > k$ att:

$$|x_n y_n - 0| = |x_n y_n| = |x_n||y_n| \leq 5|x_n| = 5|x_n - 0| < 5\frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon.$$

Alltså gäller enligt definitionen för gränsvärdet av en talföljd att $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.