HU / Institutionen för Matematik och Statistik
Gränsvärden, hösten 2016
Övning 3 – Modellsvar

L1. Visa med hjälp av definitionen av gränsvärdet för en talföljd att påståendet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+5} = 1$$

gäller.

Lösning: Enligt gränsvärdets definition konvergerar den reella talföljden (x_n) mot talet $a \in \mathbb{R}$, om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett "tröskeltal" $k > 0$ så att $|x_n - a| < \varepsilon$, då $n > k$. Vi undersöker avståndet

$$\begin{aligned}\left|\frac{n+1}{n+5} - 1\right| &= \left|\frac{n+1}{n+5} - \frac{n+5}{n+5}\right| \\ &= \left|\frac{n+1-(n+5)}{n+5}\right| \\ &= \left|\frac{-4}{n+5}\right| \\ &= \frac{4}{n+5} \\ &< \frac{4}{n}.\end{aligned}$$

Låt $\varepsilon > 0$. Vi vill välja "tröskeln" k så att

$$\frac{4}{n} < \varepsilon\,,$$

av vilket vi får (genom att multiplicera ledvis med talet n och dela ledvis med ε), att

$$n > \frac{4}{\varepsilon}\,.$$

Vi väljer alltså $k \in \mathbb{N}$ att vara sådant, att $k \geq \frac{4}{\varepsilon}$. (Kom ihåg, att vi får själv välja talet k. Lika bra kunde vi ha "spelat säkert" och valt exempelvis $k \geq \frac{5}{\varepsilon}$ eller $k \geq \frac{4}{\varepsilon} + 1$.)

Vi formulerar ännu det egentliga beviset.

Låt $\varepsilon > 0$. Vi väljer $k \in \mathbb{N}$, för vilket $k \geq \frac{4}{\varepsilon}$. Nu gäller för alla $n > k$ att

$$\left|\frac{n+1}{n+5} - 1\right| < \frac{4}{n} < \frac{4}{k} \leq \frac{4}{\frac{4}{\varepsilon}} = \varepsilon\,.$$

Kom ihåg, att då vi söker talet k, så antog vi om talet ε endast att det är positivt. Talet k hittas alltså, oberoende av vad ε är för positivt tal. Med andra ord uppfylls villkoret *för varje* $\varepsilon > 0$ i definitionen för gränsvärdet. Alltså

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+5} = 1.$$

L2. Visa med hjälp av definitionen av gränsvärdet för en talföljd att påståendet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2+5} = 1$$

gäller.

Lösning: Vi undersöker avståndet

$$\begin{aligned}
\left|\frac{n^2+1}{n^2+5} - 1\right| &= \left|\frac{n^2+1}{n^2+5} - \frac{n^2+5}{n^2+5}\right| \\
&= \left|\frac{n^2+1-(n^2+5)}{n^2+5}\right| \\
&= \left|\frac{-4}{n^2+5}\right| \\
&= \frac{4}{n^2+5} \\
&< \frac{4}{n^2} \\
&= \frac{4}{n\cdot n} \\
&\leq \frac{4}{1\cdot n}.
\end{aligned}$$

Såsom i uppgift L1 vill vi välja k så att det för alla $\varepsilon > 0$ gäller

$$\frac{4}{n} < \varepsilon$$

vilket är ekvivalent med

$$n > \frac{4}{\varepsilon}\,.$$

Låt $\varepsilon > 0$. Vi väljer $k \in \mathbb{N}$ så att $k \geq \frac{4}{\varepsilon}$. Nu gäller det för alla $n > k$ att

$$\left|\frac{n^2+1}{n^2+5} - 1\right| < \frac{4}{n} < \frac{4}{k} \leq \frac{4}{\frac{4}{\varepsilon}} = \varepsilon\,.$$

Märk än en gång att vi hittade talet k, fastän vi antog om ε endast att den är positiv. Således hittas talet k, oberoende av vilket positivt tal ε är. Med andra ord uppfylls villkoret *för varje* $\varepsilon > 0$ i definitionen för gränsvärdet. Alltså

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2+5} = 1.$$

L3. Visa med hjälp av definitionen av gränsvärdet för en talföljd att påståendet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+5} = 2$$

inte gäller.

Lösning:

Vi börjar med att uppskatta absolutbeloppsuttrycket

$$\begin{aligned}\left|\frac{n+1}{n+5}-2\right| &= \left|\frac{n+1}{n+5}-\frac{2(n+5)}{n+5}\right| = \left|\frac{-n-9}{n+5}\right| \\ &= \frac{n+9}{n+5} \geq \frac{n}{n+5n} = \frac{n}{6n} = \frac{1}{6}\,.\end{aligned}$$

Om 2 skulle vara gränsvärdet, så borde uttrycket kunna uppskattas till att vara mindre än vilket som helst ε, så länge n är tillräckligt stort. Trots detta, om vi väljer $\varepsilon = \frac{1}{6} > 0$, så gäller för varje $n \in \mathbb{N}$ enligt tidigare att

$$\left|\frac{n+1}{2n+5}-2\right| \geq \frac{1}{6} = \varepsilon\,.$$

Det finns alltså inte en sådan tröskel k, så att absolutbeloppsuttrycket för alla $n > k$ skulle vara mindre än ε.

Vi hittade alltså ett tal ε, för vilket det *inte hittas* en tröskel k som uppfyller gränsvärdets definition. Alltså är påståendet

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+5} = 2$$

falskt.

L4. Vi definierar talföljden (x_n) genom att sätta

$$x_n = \frac{n+1}{n+5}$$

då n är ett jämnt tal och

$$x_n = \frac{n^2+1}{n^2+5}$$

då n är ett udda tal. Konvergerar talföljden?

Lösning: Enligt uppgifterna L1 och L2 vet vi att

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+5} = 1 \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2+5} = 1\,.$$

Båda talföljderna hålls alltså godtyckligt nära talet 1, så länge n växer till tillräckligt stort. Eftersom x_n är en ”kombination” av likadana talföljder, så skulle det verka troligt att även x_n skulle bete sig på samma vis. Talet 1 verkar alltså som en bra kandidat som gränsvärde för talföljden x_n. Vi visar exakt att den faktiskt är det.

Låt $\varepsilon > 0$. Enligt gränsvärdets definition finns dett ett sådant $k_1 \in \mathbb{N}$, att:

$$\text{Jos } n > k_1\,, \text{ niin } \left|\frac{n+1}{n+5}-1\right| < \varepsilon\,.$$

Motsvarligen finns det ett sådant $k_2 \in \mathbb{N}$, att:

$$\text{Jos } n > k_2\,, \text{ niin } \left|\frac{n^2+1}{n^2+5}-1\right| < \varepsilon\,.$$

(Märk att vi i uppgifterna L1 och L2 tog reda på de konkreta värdena för k_1 och k_2. Vi kunde använda dessa värden nu också, men i denna uppgift räcker det med att vi känner till deras existens.)

Låt nu $k = max\{k_1, k_2\}$, alltså väljer vi som k det större av talen k_1 och k_2. Låt $n > k$. Nu finns det två alternativ: n är antingen jämnt eller udda. Vi undersöker fallen skilt.

Vi antar till först att n är jämnt. Eftersom $n > k \geq k_1$, så gäller

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n+1}{n+5} - 1\right| < \varepsilon\,.$$

Vi antar till näst att n är jämnt. Eftersom $n > k \geq k_2$, så gäller det nu

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n^2+1}{n^2+5} - 1\right| < \varepsilon\,.$$

I båda fallen kom vi till samma resultat: för alla $n > k$ gäller

$$|x_n - 1| < \varepsilon\,,$$

alltså

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1\,,$$

och därmed konvergerar följden x_n.

L5. Anta att talföljden (y_n) satisfierar villkoret $|y_n| \leq 3$ för alla n. Definiera talföljden (x_n) genom att sätta för alla n att

$$x_n = \frac{y_n}{n}.$$

Visa att följden (x_n) konvergerar.

Lösning:

Från uppgiftens antaganden märker vi att värdena för följden (y_n) är alltid inom intervallet $[-3, 3]$. Å andra sidan växer termen n i nämnaren av den allmäna termen (x_n) utan begränsningar med indexet. Från detta kan det deduceras att värdena för följden x_n kommer att närma sig nollan, då n växer. Alltså ska vi visa att (x_n) konvergerar mot 0.

För avståndet mellan den allmäna termen x_n och noll gäller

$$|x_n - 0| = |x_n| = \left|\frac{y_n}{n}\right| = \frac{|y_n|}{|n|} = \frac{|y_n|}{n} \leq \frac{3}{n},$$

där den sista olikheten följer från uppgiftens antagande. Dessutom märker vi ekvivalensen

$$\frac{3}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{3}{\varepsilon}\,,$$

där $\varepsilon > 0$. Med denna information kan vi bevisa att följden konvergerar.

Låt $\varepsilon > 0$. Vi väljer $k \in \mathbb{N}$, för vilken $k \geq \frac{3}{\varepsilon}$. Vi antar att $n > k$. Då gäller enligt tidigare att

$$|x_n - 0| \leq \frac{3}{n} < \frac{3}{k} \leq \frac{3}{\frac{3}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Alltså får vi enligt gränsvärdets definition att $(x_n) \to 0$, då $n \to \infty$, alltså konvergerar följden (x_n).