HU / Institutionen för Matematik och Statistik
Gränsvärden, hösten 2016
Övning 3 – Modellsvar

A1. Visa följande egenskaper för absloutbeoppet på basen av definitionen:

(a) $|x| \geq 0$,

(b) $|xy| = |x||y|$.

Lösning: (a) Låt x vara ett reellt tal. Då gäller exakt ett av följande villkor: $x > 0$, $x = 0$ eller $x < 0$. Vi undersöker påståendet $|x| \geq 0$, i alla dessa fall.

(i) Om $x > 0$, så gäller enligt absolutbeloppets definition att $|x| = x$ och därmed $|x| > 0$. Alltså gäller även $|x| \geq 0$.

(ii) Om $x = 0$, så gäller enligt absolutbeloppets definition att $|x| = 0$ och därmed $|x| \geq 0$.

(iii) Om $x < 0$, så gäller enligt absolutbeloppets definition att $|x| = -x$. Eftersom $x < 0$, så gäller $-x > 0$, alltså $|x| > 0$. Därmed gäller också $|x| \geq 0$.

I varje fall gäller alltså $|x| \geq 0$, så för alla x gäller $|x| \geq 0$.

(b) I denna del går man också igenom flera fall. Låt x och y vara reella tal.

(i) Vi antar till först att $x \geq 0$ och $y \geq 0$, vilket därmed ger att $xy \geq 0$. Enligt absolutbeloppets definition gäller nu $|x| = x$, $|y| = y$ och $|xy| = xy$, så därmed gäller även $|xy| = xy = |x||y|$.

(ii) Till näst antar vi att $x < 0$ och $y < 0$, vilket därmed ger att $xy > 0$. Enligt absolutbeloppets definition gäller nu $|x| = -x$, $|y| = -y$ och $|xy| = xy$, så därmed gäller även $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$.

(iii) Vi antar ännu att $x \geq 0$ och $y < 0$, vilket därmed ger att $xy \leq 0$. Enligt absolutbeloppets definition gäller nu $|x| = x$, $|y| = -y$ och $|xy| = -xy$, så därmed gäller även $|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$.

Kvar återstår att undersöka fallet $y \geq 0$ och $x < 0$. Vid detta fallet är beviset väldigt likt förra delen, så därmed kan vi förbigå beviset.

Därmed gäller påståendet vid alla fallen, alltså har vi visat att $|xy| = |x||y|$ för alla de reella talen x och y.

A2. Utred noggrant med hjälp av absolutbelopplemmat

(a) vilket intervall bildas av de reella tal x, för vilka gäller att

$$|x - 42| < 7^{-7777},$$

(b) vilken mängd bildar de reella tal x, för vilka gäller att

$$0 < |x - 42| < 7^{-7777}.$$

Lösning: (a) Vi använder absolutbelopplemmat. Vi får

$$|x - 42| < 7^{-7777} \iff -7^{-7777} < x - 42 < 7^{-7777}.$$

Genom att addera 42 till alla delar i dubbelolikheten, så är olikheterna ekvivalenta och vi får

$$-7^{-7777} < x - 42 < 7^{-7777} \iff 42 - 7^{-7777} < x < 42 + 7^{-7777}.$$

Alltså uppfyller de reella talen $42 - 7^{-7777} < x < 42 + 7^{-7777}$ uppgiftens olikhet.

(b) Vi delar upp olikheten $0 < |x - 42| < 7^{-7777}$ i två fall $0 < |x - 42|$ och $|x - 42| < 7^{-7777}$, som vi kan undersöka skilt.
Från (a)-delen ser vi att $|x - 42| < 7^{-7777} \iff 42 - 7^{-7777} < x < 42 + 7^{-7777}$, så det räcker att undersöka $0 < |x - 42|$. Enligt absolutbeloppets definition gäller $|x| \geq 0$. Alltså gäller det att undersöka fallet $0 = |x - 42|$. Nu

$$|x - 42| = 0 \iff x - 42 = 0 \iff x = 42.$$

Alltså uppfyller de reella talen $42 - 7^{-7777} < x < 42$ och $42 < x < 42 + 7^{-7777}$ uppgiftens olikhet.

A3. Sök ett sådant positivt tal a att för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$ gäller att

$$\left|\frac{2n+3}{4n+5} - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{a}{n}.$$

Lösning: Talet a hittas genom att uppskatta uttrycket

$$\left|\frac{2n+3}{4n+5} - \frac{1}{2}\right|$$

upprepade gånger uppåt, tills den fås i formen $\frac{a}{n}$, där a är ett positivt reellt tal. Detta kan exempelvis göras på följande sätt:

Vi förlänger först

$$\frac{2n+3}{4n+5} \quad \text{ja} \quad \frac{1}{2}$$

för att talen ska ha gemensam nämnare, så att det inom absolutbeloppet blir kvar endast ett bråk:

$$\begin{aligned}\left|\frac{2n+3}{4n+5} - \frac{1}{2}\right| &= \left|\frac{2(2n+3)}{2(4n+5)} - \frac{1(4n+5)}{2(4n+5)}\right| \\ &= \left|\frac{4n+6}{8n+10} - \frac{4n+5}{8n+10}\right| \\ &= \left|\frac{4n+6-4n-5}{8n+10}\right| = \left|\frac{1}{8n+10}\right|.\end{aligned}$$

Nu eftersom $n > 0$, så $\frac{1}{8n+10} > 0$, och eftersom absolutbeloppet av ett positivt tal är talet självt, så kan absolutbeloppstecknen lämnas bort, alltså

$$\left|\frac{1}{8n+10}\right| = \frac{1}{8n+10}.$$

Till näst märker vi att då man subtraherar 10 från uttryckets nämnare, så att nämnaren fortfarande hålls positiv, så växer talet, alltså får vi

$$\frac{1}{8n+10} < \frac{1}{8n}.$$

Därmed har vi fått att

$$\left|\frac{2n+3}{4n+5}-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{8n+10}\right| = \frac{1}{8n+10} < \frac{1}{8n} = \frac{\frac{1}{8}}{n}.$$

Nu får vi enligt tidigare att

$$\left|\frac{2n+3}{4n+5}-\frac{1}{2}\right| < \frac{\frac{1}{8}}{n}$$

alltså duger $\frac{1}{8}$ som talet a.

A4. Sök ett sådant positivt tal a att för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$ gäller att

$$\left|\frac{n^2+2n+3}{4n^2+5}-\frac{1}{4}\right| \leq \frac{a}{n}.$$

Lösning: Uppgiften löses på samma vis som förra uppgiften.

Vi förlänger först

$$\frac{n^2+2n+3}{4n^2+5} \quad \text{ja} \quad \frac{1}{4}$$

för att talen ska ha gemensam nämnare, så att det inom absolutbeloppet blir kvar endast ett bråk:

$$\begin{aligned}\left|\frac{n^2+2n+3}{4n^2+5}-\frac{1}{4}\right| &= \left|\frac{4(n^2+2n+3)}{4(4n^2+5)}-\frac{1(4n^2+5)}{4(4n^2+5)}\right| \\ &= \left|\frac{4n^2+8n+12}{16n^2+20}-\frac{4n^2+5}{16n^2+20}\right| \\ &= \left|\frac{4n^2+8n+12-4n^2-5}{16n^2+20}\right| = \left|\frac{8n+7}{16n^2+20}\right|.\end{aligned}$$

Nu eftersom $n > 0$, så $\frac{8n+7}{16n^2+20} > 0$, och eftersom absolutbeloppet av ett positivt tal är talet självt, så kan absolutbeloppstecknen lämnas bort, alltså

$$\left|\frac{8n+7}{16n^2+20}\right| = \frac{8n+7}{16n^2+20}.$$

Till näst märker vi att då man subtraherar 20 från uttryckets nämnare, så växer talet, alltså får vi

$$\frac{8n+7}{16n^2+20} < \frac{8n+7}{16n^2}.$$

Dessutom märker vi att vi kan förstora bråkuttrycket genom att ändra talet 7 i täljaren till $7n$, vilket ger oss

$$\frac{8n+7}{16n^2} < \frac{8n+7n}{16n^2} = \frac{15n}{16n^2} = \frac{15}{16n}.$$

Alltså har vi fått

$$\left|\frac{n^2+2n+3}{4n^2+5}-\frac{1}{4}\right| = \left|\frac{8n+7}{16n^2+20}\right| = \frac{8n+7}{16n^2+20} < \frac{15}{16n} = \frac{\frac{15}{16}}{n}.$$

Nu får vi enligt tidigare att

$$\left|\frac{n^2+2n+3}{4n^2+5}-\frac{1}{4}\right| < \frac{\frac{15}{16}}{n}$$

alltså duger $\frac{15}{16}$ som talet a.

A5. Beteckna $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$. Vi betraktar de reella tal x för vilka gäller att $|x-1| < 1$. Sök ett sådant reellt tal K att för alla ovanstående x gäller att

$$|f(x) - f(1)| \leq K|x-1|.$$

Är det möjligt att ersätta tecknet $\leq$ med $<$ i uppgiften?

Tips: I uppgiften är det avsikt att öva användning av triangelolikheten. För detta lönar det sig att skriva $f(x) - f(1) = (x^3-1) + 2(x^2-1) + 3(x-1)$. Dessutom lönar det sig att tillämpa faktat att $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Lösning: Talet K hittas genom att uppskatta uttrycket $|f(x) - f(1)|$ upprepade gånger uppåt, tills den fåtts i formen $K|x-1|$, där K är något positivt reellt tal.

Sätt 1

Vi börjar med att omforma uttrycket $|f(x) - f(1)|$ enligt det första tipset på följande vis:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(1)| &= |x^3 + 2x^2 + 3x + 4 - (1+2+3+4)| = |x^3 + 2x^2 + 3x - 1 - 2 - 3| \\ &= |x^3 - 1 + 2x^2 - 2 + 3x - 3| = |(x^3-1) + 2(x^2-1) + 3(x-1)|. \end{aligned}$$

Enligt det andra tipset vet vi att $x^3 - 1^3 = (x-1)(x^2+x+1)$. Dessutom vet vi att $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Nu kan vi hyfsa uttrycket på följande vis:

$$\begin{aligned} |(x^3-1) + 2(x^2-1) + 3(x-1)| &= |(x-1)(x^2+x+1) + 2(x-1)(x+1) + 3(x-1)| \\ &= |(x-1)((x^2+x+1) + 2(x+1) + 3)| \\ &= |x-1||(x^2+x+1) + (2x+2) + 3| \\ &= |x-1||x^2+3x+6|. \end{aligned}$$

Enligt antagandet $|x-1| < 1 \iff -1 < x-1 < 1 \iff 0 < x < 2$, vilket därmed ger att $x^2 + 2x + 5 > 0$. Därmed kan absolutbeloppstecknen tas bort, alltså

$$|x^2+3x+6||x-1| = (x^2+3x+6)|x-1|.$$

Nu kan vi uppskatta uttrycket uppåt

$$(x^2+3x+6)|x-1| \leq (2^2 + 3\cdot 2 + 6)|x-1| = (4+6+6)|x-1| = 16|x-1|.$$

Vi har alltså fått

$$\begin{aligned} |f(x) - f(1)| &= |(x^3-1) + 2(x^2-1) + 3(x-1)| \\ &= |x^2+3x+6||x-1| \\ &= (x^2+3x+6)|x-1| \\ &\leq (2^2 + 3\cdot 2 + 6)|x-1| = 16|x-1|. \end{aligned}$$

Därmed duger 16 som talet K.

Uppgiften går också att lösas på ett annat sätt, där vi använder oss av triangelolikheten.

Sätt 2

Till först använder vi oss av samma tips som tidigare och efter det använder vi oss av triangelolikheten, vilket ger att

$$|f(x) - f(1)| = |(x^3-1) + 2(x^2-1) + 3(x-1)| \leq |x^3-1| + |2(x^2-1)| + |3(x-1)|.$$

Vi använder oss av tipset att $x^3 - 1^3 = (x-1)(x^2+x+1)$, vilket vidare ger

$$\begin{aligned}|x^3-1| + |2(x^2-1)| + |3(x-1)| &= |(x-1)(x^2+x+1)| + |2(x-1)(x+1)| + |(x-1)3| \\ &= |(x-1)||(x^2+x+1)| + |(x-1)||2(x+1)| + |(x-1)||3|.\end{aligned}$$

Enligt antagandet $|x-1| < 1 \iff -1 < x-1 < 1 \iff 0 < x < 2$, vilket ger $x^2+x+1 > 0$ och $x+1 > 0$. Därmed kan absolutbeloppstecknen tas bort alltså

$$\begin{aligned}&|(x^2+x+1)||(x-1)| + |2(x+1)||(x-1)| + |3||(x-1)| \\ =&(x^2+x+1)|(x-1)| + |2(x+1)|(x-1) + 3|(x-1)| \\ =&((x^2+x+1) + (2x+2) + 3)|x-1| \\ =&(x^2+3x+6)|x-1|.\end{aligned}$$

Härifrån fortsätter lösningen på samma vis som i *sätt 1.*

Vi tar ännu reda på om tecknet $\leq$ kan ersättas med $<$. Vi undersöker fallet då $|x-1| = 0$ och därmed $x = 1$. Då får vi att uttryckets vänstra led får värdet $|f(x) - f(1)| = |f(1) - f(1)| = 0$ och det högra ledet
$K|x-1| = K|1-1| = 0$, för vilket som helst K. Då är ekvationens båda led lika stora $|f(x) - f(1)| = 0 = K|x-1|$, alltså kan tecknet $\leq$ inte ersättas med $<$.