HU / Institutionen för Matematik och Statistik
Gränsvärden, hösten 2016
Övning 2 – Modellsvar

L1. Vi tillämpar tanken att $|a-b|$ utgör avståndet mellan de reella talen a och b.

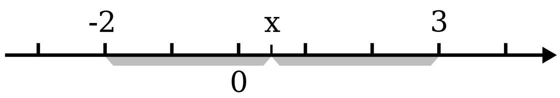
(a) Sök lösningen till ekvationen $|x-3| = |x+2|$ på basen av denna synvinkel utan att explicit lösa ekvationen.

(b) Sök lösningen till ekvationen $2|x-3| = 3|x+2|$ på basen av denna synvinkel utan att explicit lösa ekvationen.

I denna uppgift behöver svaren inte motiveras exakt.

Lösning:

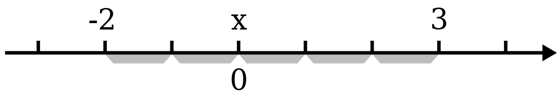
(a) Då det absoluta värdet tolkas som avståndet mellan de två talen, så tyder den vänstra sidan $|x-3|$ på avståndet mellan talen x och 3, medan ekvationens högra sida $|x+2|$ tyder på avståndet mellan talen x och -2. Ekvationen betyder alltså, att avståndet mellan x och 3 är lika stort som avståndet mellan talen x och -2. Med andra ord är x lika långt borta från talen 3 och -2, alltså är x mittemellan de två talen. Ett tal mittemellan två tal får vi exempelvis genom att räkna medelvärdet av de två talen, alltså skulle svaret i detta fall vara $x = \frac{3+(-2)}{2} = \frac{1}{2}$.



Kuva 1: I a-delen av uppgift 1L är talet x lika långt borta från -2 som från 3.

(b) Ekvationen i detta fall är möjligen lättast att tolka, då man först dividerar bort koefficienterna som är framför absolutbeloppen, så att vi istället får bråktal framför absolutbeloppen. Vi delar alltså ekvationen först med 2 och sedan med 3, vilket ger oss formen $\frac{1}{3}|x-3| = \frac{1}{2}|x+2|$. Nu kan ekvationen tolkas betyda att en tredjedel av avståndet mellan talen x och 3 är lika stort som hälften av avståndet mellan x och -2. Med andra ord ryms det mellan talen x och 3 exakt tre sådana storleks block som det ryms exakt två av mellan x och -2. Nu eftersom avståndet från x till 3 är större än till -2, så är x antingen mellan 3 och -2 eller mindre än -2. Vi går igenom båda fallen:

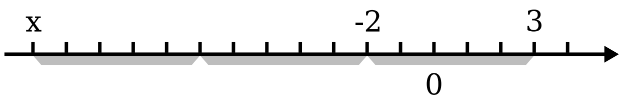
Fall 1: Vi antar, att x är mellan talen 3 och -2. Eftersom det mellan talen x och 3 finns tre block och mellan x och -2 två block, så finns det mellan talen 3 och -2 tillsammans $3+2=5$ lika stora bitar. Nu om avståndet mellan 3 och -2 delas i fem lika stora block, så är x på två blocks avstånd från -2 och på tre blocks avstånd från 3. Ett sådant block har alltså avståndet $\frac{|3-(-2)|}{5} = 1$ och då det till -2 tillsätts två av dessa block, så får vi att $x = -2 + 2 \cdot 1 = 0$.



Kuva 2: I b-delen av uppgift 1L är talet x på två blocks avstånd från -2 och tre blocks avstånd från 3. I bilden syns fall 1, dvs situationen då x är mellan -2 och 3.

Fall 2: Vi antar, att x är mindre än -2. Nu är avståndet mellan x och 3 lika stort som avståndet från x till -2 och från -2 till 3 tillsammans. Eftersom x är på ett två lika stora blocks avstånd från -2 och tre likadana blocks avstånd från 3, samt att x är mindre än -2, så är längden på ett av dessa block exakt samma som avståndet mellan -2 och 3. Nu får vi alltså som blockens längd avståndet mellan talen -2 och 3, dvs $|-2-3| = 5$. Eftersom x dessutom är två blocks längd mindre än -2, så får vi x att vara $-2 - 2 \cdot 5 = -12$.

Talet x har alltså de två möjliga värdena 0 och -12.



Kuva 3: I b-delen av uppgift 1L är talet x två blocks längder från -2 och tre blocks längder från 3. I bilden syns fallet 2, alltså situationen då x är mindre än -2.

L2. Anta att $r > 0$. Visa med hjälp av lemmat om absolutbeloppet att villkoren $|x-3| < r$ och $3 - r < x < 3 + r$ är ekvivalenta (dvs. likvärdiga).

Lösning:

Enligt lemmat om absolutbeloppet gäller att $|x - 3| < r$ och $-r < x - 3 < r$ är ekvivalenta. Uttrycket $-r < x - 3 < r$ är en förkortning för de två olikheterna

$$-r < x - 3 \quad \text{och} \quad x - 3 < r,$$

som vi märker att är ekvivalenta med olikheterna

$$3 - r < x \quad \text{och} \quad x < 3 + r$$

(fås genom att addera 3 till båda sidorna om olikheten). Å andra sidan kan vi för dessa olikheter använda förkortningen $3 - r < x < 3 + r$. Detta är villkoret vi ville visa vara ekvivalent med vår ursprungliga olikhet. Alltså är ekvivalensen bevisad.

L3. Anta att $|x - 2| < 1$. Visa att

$$|x^2 - 4| \leq 5|x - 2|.$$

Kan ovan tecknet $\leq$ ersättas med $<$?

Lösning:

Vi undersöker först antagandet $|x - 2| < 1$. Med hjälp av lemmat för absolutbelopp får vi uttrycket i formen $-1 < x - 2 < 1$ och genom att ledvis addera 4 får vi uttrycket till formen $3 < x + 2 < 5$. Nu eftersom $3 < x + 2$, så $-5 < x + 2$ alltså kan vi skriva att $-5 < x+2 < 5$. Genom att använda samma lemma åt andra hållet får vi att $|x+2| < 5$.

Nu kan vi med hjälp av vårt nya villkor börja uppskatta uttrycket $|x^2-4|$ uppåt:

$$|x^2-4| = |(x+2)(x-2)| = |x+2||x-2| \overset{(*)}{<} 5|x-2|.$$

Vid uppskattningen $(*)$ använder vi oss av villkoret $|x+2| < 5$, men detta kan göras endast då $|x-2| \neq 0$, eftersom ifall $|x-2| = 0$, så $|x+2||x-2| = 0$ och $5|x-2| = 0$ alltså skulle nämnda olikhet $|x+2||x-2| < 5|x-2|$ få formen $0 < 0$, vilket inte gäller. Alltså undersöker vi fallet $|x-2| = 0$ skiljt.

Om det nu istället gäller att $|x-2| = 0$, så gäller $x = 2$ alltså får vi olikhetens vänstra sida att vara $|x^2-4| = |2^2-4| = |4-4| = 0$ och den högra sidan $5|x-2| = 5|2-2| = 5|0| = 0$. Således får olikheten som ska visas formen $0 \leq 0$ alltså gäller den. Nu är påståendet alltså bevisat i alla fallen.

Ovan konstaterades att då $x = 2$, så uppfyller olikheten likheten, alltså kan tecknet $\leq$ inte ersättas med tecknet $<$.

L4. Sök ett sådant positivt reellt tal a att det för alla positiva heltal n gäller att

$$\left|\frac{n+2}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{a}{n}.$$

Lösning:

Talet a hittas genom att uppskatta uttrycket

$$\left|\frac{n+2}{2n+3} - \frac{1}{2}\right|$$

upprepade gånger uppåt, tills den fås i formen $\frac{a}{n}$, där a är ett positivt reellt tal. Detta kan göras exempelvis på följande sätt:

Vi utvidgar till först

$$\frac{n+2}{2n+3} \quad \text{och} \quad \frac{1}{2}$$

så de har en gemensam nämnare, så att det inom absolutbeloppet blir kvar endast ett bråk kvar:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{n+2}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| &= \left|\frac{2(n+2)}{2(2n+3)} - \frac{1(2n+3)}{2(2n+3)}\right| \\
&= \left|\frac{2n+4}{4n+6} - \frac{2n+3}{4n+6}\right| \\
&= \left|\frac{2n+4-2n-3}{4n+6}\right| = \left|\frac{1}{4n+6}\right|.
\end{aligned}$$

Nu eftersom $n > 0$, så $\frac{1}{4n+6} > 0$, och eftersom absolutbeloppet av ett positivt tal är talet själv, så kan absolutbeloppet tas bort, dvs

$$\left|\frac{1}{4n+6}\right| = \frac{1}{4n+6}.$$

Till nästa märker vi att då man för ett positivt tal subtraherar 6 från nämnaren, så växer talet, vilket ger

$$\frac{1}{4n+6} < \frac{1}{4n}.$$

Alltså har vi fått

$$\left|\frac{n+2}{2n+3}-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{4n+6}\right| = \frac{1}{4n+6} < \frac{1}{4n} = \frac{\frac{1}{4}}{n}.$$

Nu gäller enligt ovan

$$\left|\frac{n+2}{2n+3}-\frac{1}{2}\right| < \frac{\frac{1}{4}}{n}$$

alltså duger $\frac{1}{4}$ som det sökta talet a.

L5. Sök ett sådant positivt reellt tal a att det för alla positiva heltal $n > 2$ gäller att

$$\left|\frac{n^2+n+1}{n^2+3}-1\right| \leq \frac{a}{n}.$$

Lösning:

Vi löser uppgiften på samma sätt som den föregående uppgiften. Nu kan uppskattningen uppåt göras exempelvis såhär:

Vi utvidgar än en gång differensens tal så att de har en gemensam nämnare, så att det inom absolutbeloppet blir kvar endast ett bråk:

$$\left|\frac{n^2+n+1}{n^2+3}-1\right| = \left|\frac{n^2+n+1}{n^2+3}-\frac{n^2+3}{n^2+3}\right| = \left|\frac{n^2+n+1-n^2-3}{n^2+3}\right| = \left|\frac{n-2}{n^2+3}\right|.$$

Nu eftersom $n > 2$, så $\frac{n-2}{n^2+3} > 0$, och eftersom absolutbeloppet av ett positivt tal är talet själv, så kan absolutbeloppet tas bort, dvs

$$\left|\frac{n-2}{n^2+3}\right| = \frac{n-2}{n^2+3}.$$

Till nästa märker vi att då man för ett positivt tal adderar 2 till täljaren, så växer talet, vilket ger

$$\frac{n-2}{n^2+3} < \frac{n}{n^2+3}.$$

Vidare får vi att då man subtraherar 3 från nämnaren, så växer talet, vilket ytterligare ger

$$\frac{n}{n^2+3} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Nu då vi slår samman dessa uppskattningar, så får vi att

$$\left|\frac{n^2+n+1}{n^2+3}-1\right| = \left|\frac{n-2}{n^2+3}\right| = \frac{n-2}{n^2+3} < \frac{n}{n^2+3} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Alltså duger som talet a nu1.