HU / Institutionen för Matematik och Statistik
Gränsvärden, hösten 2016
Övning 2 – Modellsvar

A1. Vi uppskattar storleken av bråkuttrycket

$$\frac{2n+3}{4n+5}$$

med hjälp av de egenskaper för olikheter som har presenterats på föreläsningarna. I ovanstående uttryck är n ett positivt heltal. Sök positiva heltal a, b, c och d, så att det gäller för alla positiva heltal n att

$$\frac{a}{b} \leq \frac{2n+3}{4n+5} \leq \frac{c}{d}.$$

Lösning: Vi använder oss av tipset och försöker förstora/-minska bråkuttrycket så mycket att vi kan förkorta variabeln n bort.

Eftersom $n = 1, 2, 3, \ldots$, så får vi en väldigt grov övre gräns exempelvis med följande uppskattning:

$$\frac{2n+3}{4n+5} \leq \frac{2n+3}{4n} \leq \frac{2n+3n}{4n} = \frac{5n}{4n} = \frac{5}{4}$$

På samma vis får vi en grov nedre gräns med följande uppskattning:

$$\frac{2n+3}{4n+5} \geq \frac{2n}{4n+5} \geq \frac{2n}{4n+5n} = \frac{2n}{9n} = \frac{2}{9}$$

På detta vis får vi ett svar $a = 5,\ b = 4,\ c = 2$ och $d = 9$.

Givetvis är detta inte det enda rätta svaret. Exempelvis kunde uppskattningarna förbättras i detta fall lite genom att förminska $(n+1)$ istället för n:

$$\frac{2n+3}{4n+5} = \frac{2n+2+1}{4n+4+1} = \frac{2(n+1)+1}{4(n+1)+1} \leq \frac{2(n+1)+(n+1)}{4(n+1)} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{2n+3}{4n+5} = \frac{2n+2+1}{4n+4+1} = \frac{2(n+1)+1}{4(n+1)+1} \geq \frac{2(n+1)}{4(n+1)+(n+1)} = \frac{2}{5}$$

A2. (fortsättning på föregående uppgift) Vi antar dessutom att $n > 10$. Förbättra uppskattningarna i föregående uppgift. Med andra ord, sök positiva heltal m, r, p och q så att för alla positiva heltal $n > 10$ gäller att

$$\frac{m}{r} \leq \frac{2n+3}{4n+5} \leq \frac{p}{q}$$

och för vilka $\frac{a}{b} < \frac{m}{r}$ ja $\frac{p}{q} < \frac{c}{d}$.

Lösning: Såsom i uppgift A1, så försöker vi göra uppskattningar genom att förkorta med n i bråkuttrycket. I täljaren har vi konstanten 3 och i nämnaren 5. Vi märker att för alla $n > 10$ gäller

$$3 \leq \frac{1}{3}n \quad \text{ja} \quad 5 \leq \frac{1}{2}n.$$

(T.ex. om $n = 11$, så $\frac{1}{3}n = \frac{11}{3} \approx 3,7$ och $\frac{1}{2}n = \frac{11}{2} = 5,5$.)

Nu, då **villkoret** $n > 10$ **är i kraft**, så kan vi uppskatta:

$$\frac{2n+3}{4n+5} \leq \frac{2n+3}{4n} \leq \frac{2n+\frac{1}{3}n}{4n} = \frac{2+\frac{1}{3}}{4} = \frac{7}{12} \approx 0,58$$

$$\frac{2n+3}{4n+5} \geq \frac{2n}{4n+5} \geq \frac{2n}{4n+\frac{1}{2}n} = \frac{2}{4+\frac{1}{2}} = \frac{4}{9} \approx 0,44$$

På detta vis får vi som svar $p = 7$, $q = 12$, $m = 4$ och $l = 9$.

Märk att även denna uppgift har många korrekta lösningar. Exempelvis kunde dessa uppskattningar ännu förbättras genom att märka att då $n > 10$, så gäller $3 \leq \frac{3}{11}n$ och $5 \leq \frac{5}{11}n$. Då kan man uppskatta bråkuttrycken på samma vis som tidigare: Med villkoret $n > 10$ i kraft, så gäller

$$\frac{2n+3}{4n+5} \leq \frac{2n+3}{4n} \leq \frac{2n+\frac{3}{11}n}{4n} = \frac{2+\frac{3}{11}}{4} = \frac{25}{44} \approx 0,57$$

$$\frac{2n+3}{4n+5} \geq \frac{2n}{4n+5} \geq \frac{2n}{4n+\frac{5}{11}n} = \frac{2}{4+\frac{5}{11}} = \frac{22}{49} \approx 0,45$$

På detta vis får vi som svar $p = 25$, $q = 44$, $m = 22$ och $l = 49$.

A3. Sök ett sådant positivt reellt tal K att för alla reella tal x gäller: om $3 < x < 4$, så är $x^2 - 9 < K(x-3)$.

Lösning: Vi märker att $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$.

Då $3 < x < 4$, så $x - 3 > 0$. Nu då vi förstorar faktorn $(x+3)$, så kommer uttrycket $(x+3)(x-3)$ att växa.

Om $3 < x < 4$, så

$$x^2 - 9 = (x+3)(x-3) < (4+3)(x-3) = 7(x-3).$$

Som svar duger exempelvis $K = 7$.

A4. Vi fortsätter att undersöka uttrycket x^2 litet till höger om punkten $x = 3$. Anta att $3 < x < 3 + 7^{-777}$. Vilken slutsats kan du dra på basen av resultatet i föregående uppgift om storleken av skillnaden $x^2 - 9$?

Lösning: Vi märker att $3 + 7^{-777} < 4$, så uppskattningen i föregående uppgift gäller då $K = 7$. Således, då $3 < x < 3 + 7^{-777}$, så kan vi uppskatta

$$x^2 - 9 < 7(x-3) < 7(3 + 7^{-777} - 3) = 7^{-776}$$

A5. Vi fortsätter att undersöka uttrycket x^2 litet till höger om punkten $x = 3$, och tillämpar resultatet från uppgift A3.

(a) Sök ett sådant positivt reellt tal δ att för alla reella tal x gäller: om $3 < x < 3+\delta$, så är $x^2 - 9 < 7^{-7777}$.

(b) Sök ett sådant positivt reellt tal δ att för alla reella tal x gäller: om $3 < x < 3+\delta$, så är $x^2 < 9 + 7^{-7777}$.

Lösning:

(a) Funderingar: Om $0 < \delta < 1$, så gäller enligt uppgift A3 att $x^2 - 9 < 7(x-3)$, då $3 < x < 3 + \delta$. Det enklare uttrycket $7(x-3)$ fungerar alltså som en övre gräns för det aningen mer komplicerade uttrycket $x^2 - 9$ vid det beaktade intervallet. Vi undersöker när detta aningen enklare uttrycket uppfyller villkoret vi vill ha:

$$7(x-3) < 7^{-7777} \iff x - 3 < 7^{-7778} \iff x < 3 + 7^{-7776}$$

Med andra ord, då $3 < x < 3 + 7^{-7778}$, så

$$x^2 - 9 < 7(x-3) < 7^{-7777},$$

från vilket vi ser att $\delta = 7^{-7778}$ duger. Vi skriver ännu ett exakt matematiskt bevis:

Vi väljer $\delta = 7^{-7778}$. Låt $3 < x < 3 + \delta$.

Då gäller även $3 < x < 3+\delta < 4$, alltså får vi enligt uppgift A3 att $x^2 - 9 < 7(x-3)$. Alltså

$$x^2 - 9 < 7(x-3) < 7(3+\delta-3) = 7\delta = 7^{-7777},$$

vilket är det sökta resultatet.

(b) Från uppgiftens olikhet kan vi lätt märka att det egentligen är väsentligen frågan om samma uppgift som i (a)-delen. Alltså duger $\delta = 7^{-7778}$ även i denna del. Vi skriver ännu ett exakt matematiskt bevis:

Vi väljer $\delta = 7^{-7778}$. Låt $3 < x < 3 + \delta$.

Nu gäller enligt (a)-delen

$$x^2 - 9 < 7^{-7777},$$

alltså

$$x^2 < 9 + 7^{-7777},$$

vilket är det sökta resultatet.