HU / Institutionen för Matematik och Statistik
Gränsvärden, hösten 2016
Övning 1 – Modellsvar

L1. Vi uppskattar storleken av bråkuttrycket

$$\frac{3n+1}{n+3}$$

med hjälp av de egenskaper för olikheter som presenteras på föreläsningarna. (Se även vid behov den finskspråkiga kurssidans moodle-sidor.) I ovanstående uttryck är n ett positivt heltal. Uppgiften består av att söka positiva heltal a, b, c och d, så att det gäller för alla positiva heltal n att

$$\frac{a}{b} \leq \frac{3n+1}{n+3} \leq \frac{c}{d}.$$

Kom ihåg att ett sådant bråkuttryck kan förminskas exempelvis genom att förminska täljaren eller förstora nämnaren, samt förstoras genom att förstora täljaren eller förminska nämnaren.

Lösning: Vi uppskattar först termen uppåt genom att förstora täljaren och förminska nämnaren

$$\begin{aligned} \frac{3n+1}{n+3} &\leq \frac{3n+n}{n+3} \\ &\leq \frac{4n}{n+3} \\ &\leq \frac{4n}{n} \\ &\leq \frac{4}{1} \end{aligned}$$

Sedan uppskattar vi termen neråt genom att förminska täljaren och förstora nämnaren

$$\begin{aligned} \frac{3n+1}{n+3} &\geq \frac{3n}{n+3} \\ &\geq \frac{3n}{n+3n} \\ &\geq \frac{3n}{4n} \\ &\geq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Alltså

$$\frac{3}{4} \leq \frac{3n+1}{n+3} \leq \frac{4}{1}$$

Därmed kan man välja som svar exempelvis $a = 3,\ b = c = 4$ och $d = 1$.

L2. **L2** Sök ett sådant positivt reellt tal K att för varje reella tal x gäller: om $1 < x < 2$, så är $x^2 - 1 < K(x-1)$.

Lösning: Vi märker att $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$.

Då $1 < x < 2$, så är $x - 1 > 0$. Nu då vi förstorar faktorn $x+1$, så växer termen $(x+1)(x-1)$.

Om $1 < x < 2$, så

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= (x+1)(x-1) \\ &< (2+1)(x-1) \\ &= 3(x-1) \end{aligned}$$

Alltså

$$x^2 - 1 < 3(x-1)$$

Som svar duger exempelvis $K = 3$.

L3. Vi fortsätter att undersöka uttrycket x^2 litet till höger om punkten $x = 1$, och tillämpar resultatet från föregående uppgift.

(a) Sök ett sådant positivt reellt tal δ att för varje reellt tal x gäller: om $1 < x < 1+\delta$, så är $x^2 - 1 < 7^{-777}$.

(b) Sök ett sådant positivt reellt tal δ att för varje reellt tal x gäller: om $1 < x < 1+\delta$, så är $x^2 < 1 + 7^{-777}$.

Lösning:

(a) Funderingar:
$1 < x < 1 + \delta$ om och endast om $0 < x - 1 < \delta$.
Då $\delta \leq 1$, så gäller enligt uppgift L2 att $x^2 - 1 < 3(x-1)$, då $1 < x < 1 + \delta$.

Vi vill välja δ så att $\delta \leq 1$ och då $0 < x - 1 < \delta$, så

$$3(x-1) \leq 7^{-777}$$

Detta gäller om och endast om

$$x - 1 \leq \frac{7^{-777}}{3}$$

Vi väljer alltså δ så att $\delta \leq \dfrac{7^{-777}}{3}$. Vi väljer exempelvis $\delta = 7^{-778}$

Vi tar och skriver ännu ett formellt bevis för att detta δ faktiskt duger som svar för uppgiften.

Bevis:
Vi väljer $\delta = 7^{-778}$
Låt $1 < x < 1 + \delta$.

Då gäller $1 < x < 1+7^{-778} < 2$ alltså enligt uppgift L2 $x^2-1 < 3(x-1)$. Även $0 < x-1 < \delta$.
Alltså

$$\begin{aligned} x^2-1 &< 3(x-1) \\ &< 3\delta \\ &< 3\frac{7^{-777}}{3} \\ &= 7^{-777} \end{aligned}$$

Alltså, då $\delta = 7^{-778}$, så gäller för alla reella tal x: om $1 < x < 1+\delta$, så $x^2-1 < 7^{-777}$.

(b) Vi väljer $\delta = 7^{-778}$.
Låt $1 < x < 1+\delta$.
Nu gäller enligt a-delen att

$$x^2-1 < 7^{-777}$$

alltså

$$x^2 < 1+7^{-777}$$

Alltså, då $\delta = 7^{-778}$, så gäller det för alla reella tal x: om $1 < x < 1+\delta$, så $x^2 < 1+7^{-777}$.

L4. Det *inversa talet* till det reella talet a är ett sådant reellt tal b, för vilket det gäller att $ab = 1$. Förklara varför talet 0 saknar inverst tal, dvs. varför det inte är tillåtet att dividera med nollan.

Lösning:

Vi märker först från de reella talens axiom, framförallt från delningslagen att för alla $b \in \mathbb{R}$ gäller

$$0b = (0+0)b = 0b + 0b.$$

Genom att subtrahera talet $0b$ ledvis får vi att

$$0b = 0$$

för alla reella tal b.
Särskilt om talet 0 hade ett inverst tal b bland de reella talen, så skulle det gälla att

$$0 = 0b = 1.$$

Eftersom nollelementet 0 och enheten 1 är olika element inom de reella talen, så kan inte ekvationen ovanom gälla. Talet 0 har inte alltså ett inverst element.
Att multiplicera med det inversa talet kan jämföras med att dividera, så detta är vad som menas med att man 'inte får dividera med noll'.