INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Gränsvärden 2016
Uppgifter 6 A och L
Veckan 10.10-14.10.2016

A1 Visa att
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-5}{n^2+3} = \infty.$$

A2 Visa att
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2-n^3}{n^2-3} = -\infty.$$

A3 Definiera talföljden (x_n) med villkoren $x_1 = 3$ och
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \sqrt{x_n}).$$

(a) Visa att följden konvergerar genom att visa att den är nedåt begränsad och avtagande.
(b) Bestäm gränsvärdet av talföljden.

A4 Bestäm $\inf A$ och $\sup A$, där
$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2 \text{ eller } 3 < x < 4\}.$$

A5 Anta att $x_n \to 3$ och $y_n \to \infty$ då $n \to \infty$. Visa att $x_n + y_n \to \infty$ då $n \to \infty$. Observera att kursen inte har någon sats som direkt kan tillämpas i detta fall. I uppgiften måste man därför arbeta utgående från definitionerna.

Uppgifter för slutet av veckan: L1, L2, L3, L4 och L5. Vi börjar smutta på gränsvärdet för funktioner (se Definition 3.1.1 i kursboken [HKK]). Funktioners kontinuitet och deriverbarhet är tillämpningar av gränsvärdesbegreppet.

Funktionen f är kontinuerlig i punkten x_0, om $f(x) \to f(x_0)$ då $x \to x_0$.

Funktionen f är deriverbar i punkten x_0, och dess derivata är det reella talet A, om
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to A$$

då $x \to x_0$.

L1 Anta att A och B är icke-tomma uppåt begränsade mängder av reella tal. Beteckna $a = \sup A$ och $b = \sup B$. Visa att

$$a + b = \sup\{x + y \mid x \in A \text{ och } y \in B\}.$$

L2 Vi betraktar talföljden (x_n). Anta att det för varje $n \in \mathbb{N}_1$ gäller att $x_n > 0$. Visa noggrant att följande villkor är ekvivalenta.

(a) $x_n \to 0$ då $n \to \infty$.

(b) $\frac{1}{x_n} \to \infty$ då $n \to \infty$.

L3 Visa på basen av definitionen av gränsvärdet för en funktion att

$$\frac{x+3}{x+5} \to \frac{2}{3}$$

då $x \to 1$.

L4 Visa på basen av definitionerna av gränsvärdet och kontinuitet för funktioner att den funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som definieras av villkoret $f(x) = |x|$ är kontinuerlig i varje punkt $x_0 \in \mathbb{R}$. Betrakta fallen $x_0 < 0$, $x_0 = 0$ och $x_0 > 0$ separat. (Alternativt, kom ihåg triangelolikheten nedåt.)

L5 Anta att funktionen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfierar för varje $x \in \mathbb{R}$ villkoret $|g(x)| \leq 3$. Definiera funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med villkoret $f(x) = x^2 g(x)$. Visa på basen av definitionerna av gränsvärdet och derivatan för funktioner att funktionen f är deriverbar i punkten $x_0 = 0$.