INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Gränsvärden 2016
Uppgifter 5 A och L
Veckan 3.10-7.10.2016

Uppgifter för början av veckan: A1, A2, A3, A4 och A5. Vi övar egenskaperna hos gränsvärden för talföljder.

A1 Bestäm

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+1}$$

på basen av kursens kunskaper. Motivera ditt resultat noggrant. Observera strukturen "om ..., så ..." i Sats 2.2.8 i kursboken. I uppgiften får man använda kunskap om gränsvärdet av konstanta talföljder och följden $(\frac{1}{n})$.

A2 Bestäm

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{3n^3+1}$$

på basen av kursens kunskaper. Motivera ditt resultat noggrant. Observera strukturen "om ..., så ..." i Sats 2.2.8 i kursboken. I uppgiften får man använda kunskap om gränsvärdet av konstanta talföljder och följden $(\frac{1}{n})$.

A3 Anta att $x_n \to a$ då $n \to \infty$.
(a) Definiera y_n med ekvationen $y_n = x_{n^2}$. Visa att $y_n \to a$ då $n \to \infty$.
(b) Definiera z_n med ekvationen $z_0 = 42$ och $z_n = x_{n-1}$ kun $n > 1$. Visa att $z_n \to a$ då $n \to \infty$.

A4 Man betraktar talföljden (x_n) definierad av villkoren $x_1 = 3$ och

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right)$$

då $n = 1, 2, \ldots$. Anta att det är känt att det finns ett reellt tal a, för vilken gäller att $x_n \to a$ då $n \to \infty$. Bestäm det enda möjliga värdet på talet a. Följer det av uppgiftens argument att vi samtidigt har visat att följden (x_n) konvergerar?

A5 Man definierar att talföljden (x_n) växer obegränsat (dvs. går mot ∞), om det mot varje reellt tal M finns en tröskel $K \in \mathbb{N}_1$, så att för varje $n > K$

gäller att $x_n > M$. Detta betecknas

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

eller synonymt också

$$x_n \to \infty \text{ då } n \to \infty.$$

Visa att

$$\frac{n^2+1}{n+1} \to \infty \text{ då } n \to \infty.$$

Tips: uppskatta talföljdens term $x_n = \frac{n^2+1}{n+1}$ nedåt till ett enklare uttryck, för vilket det är lätt att lösa hur stort indexet n bör vara för att $x_n > M$.

Uppgifter för slutet av veckan: L1, L2, L3, L4 och L5. Vi fortsätter att studera gränsvärden. Som nya saker kommer begreppen supremum och infimum, samt deras samband med existensen av gränsvärden.

L1 Anta att $x_n > 0$ för alla n och att $x_n \to a$ då $n \to \infty$. Visa att

$$\sqrt{x_n} \to \sqrt{a}.$$

L2 Vi antar att det är känt att

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$$

då $n \to \infty$. Bestäm på basen av detta och föregående uppgift

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n.$$

L3 Visa att $n - \sqrt{n} \to \infty$ då $n \to \infty$.

L4 Vi betraktar delmängden

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ och } x^2 < 5\}$$

av de reella talen. Visa att $a = \sup A$ existerar och att $a^2 = 5$. I uppgiften visar man alltså att existensen av talet $\sqrt{5}$ följer från axiomen för de reella talen.

L5 Visa att talföljden i uppgift A4 konvergerar.