INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Gränsvärden 2016
Uppgifter 4 A och L
Veckan 26.9-30.9.2016

Uppgifter för början av veckan: A1, A2, A3, A4 och A5. Vi övar definitionen av gränsvärdet för en talföljd.

A1 Visa med hjälp av definitionen för gränsvärdet av en talföljd att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{2n+3} = \frac{1}{2}$$

gäller.

A2 Visa med hjälp av definitionen för gränsvärdet av en talföljd att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^2+3} = 0$$

gäller.

A3 Visa med hjälp av definitionen för gränsvärdet av en talföljd att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{2n+3} = 1$$

inte gäller.

A4 Är påståendet

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^4+n} - \sqrt{n^4+1}) = 0$$

sant? Ge svar på basen av definitionen för gränsvärdet av en talföljd. (I uppgiften får man använda kunskapen att varje $x \geq 0$ har en kvadratrot, samt att för icke-negativa tal gäller: kvadratroten av ett större tal är större. Hur kan detta motiveras?)

A5 Man antar att talföljderna (x_n) och (y_n) satisfierar följande villkor:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

och

$$\text{för alla } n \in \mathbb{N}_1 \text{ gäller att } |y_n| \leq 5.$$

Visa att

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0.$$

Uppgifter för slutet av veckan: L1, L2, L3, L4 och L5. Vi bekantar oss med egenskaperna hos gränsvärdet för talföljder. I dessa uppgifter får man använda de egenskaper om gränsvärdet för talföljder som har presenterats på kursen (i kursboken). Kom ihåg att beteckningen

$$x_n \to a \text{ då } n \to \infty$$

avser exakt det samma som

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

(Alltså dessa betckningar är synonyma med varandra.)

L1 Utred

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 2n^2 + 3n + 4}{4n^3 + 3n^2 + 2n + 1}$$

med hjälp av kursens kunskaper om gränsvärdet av talföljder.

L2 Man betraktar talföljderna (x_n) och (y_n).

(a) Anta att båda divergerar. Vad vet man om konvergensen eller divergensen av följden $(x_n + y_n)$?

(b) Anta att följden (x_n) konvergerar och följden (y_n) divergerar. Vad vet man om konvergensen eller divergensen av av följden $(x_n + y_n)$?

(c) Anta att $x_n \to a$ då $n \to \infty$ samt att följden (y_n) divergerar. Anta dessutom att $x_n \neq 0$ för alla $n \in \mathbb{N}_1$. Vad vet man om konvergensen eller divergensen av följden $(x_n y_n)$?

L3 Sök upp Bernoullis olikhet från kursboken och utred vad olikheten säger. Visa noggrant med hjälp av Bernoullis olikhet att

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

För att tillämpa Bernoullis olikhet lönar det sig att skriva

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{1 + (\frac{3}{2} - 1)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}.$$

L4 I definitionen av gränsvärdet av talföljder förekommer ”kvantorraden”

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists K \in \mathbb{N}_1 \, \forall n > K.$$

Ett sätt att få en känsla för definitionen är att fundera på andra ’kvantorrader”. Utred vad följande ’kvantorrder” säger om talföljden (x_n).

(a) $\exists K \in \mathbb{N}_1 \forall \varepsilon > 0 \, \forall n > K : |x_n - a| < \epsilon$,

(b) $\exists K \in \mathbb{N}_1 \exists \varepsilon > 0 \, \forall n > K : |x_n - a| < \epsilon$.

L5 Anta att $x_n \to a$ då $n \to \infty$, och att $a \neq 0$. Visa att det finns ett sådant $K \in \mathbb{N}_1$, att för varje $n > K$ gäller att

$$|x_n| > \frac{1}{2}|a|.$$

Använd triangelolikheten nedåt, och vid behov kan fallen $a > 0$ och $a < 0$ diskuteras separat. (Ovanstående faktum behövs exempelvis när man visar kvotregeln för gränsvärdet av talföljder.)

Obs: ovan betecknas $\mathbb{N}_1 = \{1, 2, 3, \ldots\}$.