INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Gränsvärden 2016
Uppgifter 2 A och L
Veckan 12.9-16.9

Uppgifter för början av veckan: A1, A2, A3, A4 och A5

A1 Vi uppskattar storleken av bråkuttrycket

$$\frac{2n+3}{4n+5}$$

med hjälp av de egenskaper för olikheter som har presenterats på föreläsningarna. I ovanstående uttryck är n ett positivt heltal. Sök positiva heltal a, b, c och d, så att det gäller för alla positiva heltal n att

$$\frac{a}{b} \leq \frac{2n+3}{4n+5} \leq \frac{c}{d}.$$

A2 (fortsättning på föregående uppgift) Vi antar dessutom att $n > 10$. Förbättra uppskattningarna i föregående uppgift. Med andra ord, sök positiva heltal m, r, p och q så att för alla positiva heltal $n > 10$ gäller att

$$\frac{m}{r} \leq \frac{2n+3}{4n+5} \leq \frac{p}{q}$$

och för vilka $\frac{a}{b} < \frac{m}{r}$ ja $\frac{p}{q} < \frac{c}{d}$.

A3 Sök ett sådant positivt reellt tal K att för alla reella tal x gäller: om $3 < x < 4$, så är $x^2 - 9 < K(x-3)$.

A4 Vi fortsätter att undersöka uttrycket x^2 litet till höger om punkten $x = 3$. Anta att $3 < x < 3 + 7^{-777}$. Vilken slutsats kan du dra på basen av resultatet i föregående uppgift om storleken av skillnaden $x^2 - 9$?

A5 Vi fortsätter att undersöka uttrycket x^2 litet till höger om punkten $x = 3$, och tillämpar resultatet från uppgift A3.

(a) Sök ett sådant positivt reellt tal δ att för alla reella tal x gäller: om $3 < x < 3 + \delta$, så är $x^2 - 9 < 7^{-7777}$.

(b) Sök ett sådant positivt reellt tal δ att för alla reella tal x gäller: om $3 < x < 3+\delta$, så är $x^2 < 9 + 7^{-7777}$.

Uppgifter för slutet av veckan: L1, L2, L3, L4 och L5

L1 Vi tillämpar tanken att $|a-b|$ utgör avståndet mellan de reella talen a och b.

(a) Sök lösningen till ekvationen $|x-3| = |x+2|$ på basen av denna synvinkel utan att explicit lösa ekvationen.

(b) Sök lösningen till ekvationen $2|x-3| = 3|x+2|$ på basen av denna synvinkel utan att explicit lösa ekvationen.

I denna uppgift behöver svaren inte motiveras exakt.

L2 Anta att $r > 0$. Visa med hjälp av lemmat om absolutbeloppet att villkoren $|x-3| < r$ och $3-r < x < 3+r$ är ekvivalenta (dvs. likvärdiga).

L3 Anta att $|x-2| < 1$. Visa att

$$|x^2-4| \leq 5|x-2|.$$

Kan ovan tecknet $\leq$ ersättas med $<$?

L4 Sök ett sådant positivt reellt tal a att det för alla positiva heltal n gäller att

$$\left|\frac{n+2}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{a}{n}.$$

L5 Sök ett sådant positivt reellt tal a att det för alla positiva heltal $n > 2$ gäller att

$$\left|\frac{n^2+n+1}{n^2+3} - 1\right| \leq \frac{a}{n}.$$