INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Gränsvärden 2016
Uppgifter 3 A och L
Veckan 19.9-23.9.2016

Uppgifter för början av veckan: A1, A2, A3, A4 och A5. Vi övar absolutbelopp.

A1 Visa följande egenskaper för absloutbeoppet på basen av definitionen:
(a) $|x| \geq 0$,
(b) $|xy| = |x||y|$.

A2 Utred noggrant med hjälp av absolutbelopplemmat
(a) vilket intervall bildas av de reella tal x, för vilka gäller att

$$|x - 42| < 7^{-7777},$$

(b) vilken mängd bildar de reella tal x, för vilka gäller att

$$0 < |x - 42| < 7^{-7777}.$$

A3 Sök ett sådant positivt tal a att för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$ gäller att

$$\left| \frac{2n + 3}{4n + 5} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{a}{n}.$$

A4 Sök ett sådant positivt tal a att för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$ gäller att

$$\left| \frac{n^2 + 2n + 3}{4n^2 + 5} - \frac{1}{4} \right| \leq \frac{a}{n}.$$

A5 Beteckna $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$. Vi betraktar de reella tal x för vilka gäller att $|x - 1| < 1$. Sök ett sådant reellt tal K att för alla ovanstående x gäller att

$$|f(x) - f(1)| \leq K|x - 1|.$$

Är det möjligt att ersätta tecknet $\leq$ med $<$ i uppgiften?

Tips: I uppgiften är det avsikt att öva användning av triangelolikheten. För detta lönar det sig att skriva $f(x)-f(1) = (x^3-1)+2(x^2-1)+3(x-1)$. Dessutom lönar det sig att tillämpa faktat att $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Uppgifter för slutet av veckan: L1, L2, L3, L4 och L5. Vi bekantar oss med definitionen av gränsvärdet av en talföljd.

L1 Visa med hjälp av definitionen av gränsvärdet för en talföljd att påståendet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+5} = 1$$

gäller.

L2 Visa med hjälp av definitionen av gränsvärdet för en talföljd att påståendet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2+5} = 1$$

gäller.

L3 Visa med hjälp av definitionen av gränsvärdet för en talföljd att påståendet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+5} = 2$$

inte gäller.

L4 Vi definierar talföljden (x_n) genom att sätta

$$x_n = \frac{n+1}{n+5}$$

då n är ett jämnt tal och

$$x_n = \frac{n^2+1}{n^2+5}$$

då n är ett udda tal. Konvergerar talföljden?

L5 Anta att talföljden(y_n) satisfierar villkoret $|y_n| \leq 3$ för alla n. Definiera talföljden (x_n) genom att sätta för alla n att

$$x_n = \frac{y_n}{n}.$$

Visa att följden (x_n) konvergerar.