HU / Institutionen för matematik och statistik
Differentialkalkyl, hösten 2016
Övning 7 – Modellösningar

A1. Bestäm
$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2+1}{6x+1}.$$
Motivera ditt svar med hjälp av kursens kunskaper! (Du får använda faktan om gränsvärdet för konstanta funktioner och för funktionen $f(x)=x$.)

Lösning: Enligt Sats 3.1.11. i [HKK]: Om $f(x)\to a$ och $g(x)\to b$, då $x\to x_0$, så gäller följande gränsvärdesresultat:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+g(x)=a+b$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=ab$

(3) om dessutom $b\neq 0$, så $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}$

Enligt det vi vet om gränsvärden för den identiska funktionen och konstanta funktionen vet vi dessutom:
$$\lim_{x\to 2} x = 2 \text{ och } \lim_{x\to 2} a = a.$$
Vi bestämmer till näst gränsvärdena för det givna uttryckets delar med hjälp av gränsvärdena för den identiska och konstanta funktionen:

- $\lim\limits_{x\to 2} xx \overset{(2)}{=} \lim\limits_{x\to 2} x \lim\limits_{x\to 2} x = 2\cdot 2 = 4.$
- $\lim\limits_{x\to 2} 3x^2 \overset{(2)}{=} \lim\limits_{x\to 2} 3 \lim\limits_{x\to 2} x^2 = 3\cdot 4 = 12.$
- $\lim\limits_{x\to 2} 3x^2+1 \overset{(1)}{=} \lim\limits_{x\to 2} 3x^2 + \lim\limits_{x\to 2} 1 = 13.$
- $\lim\limits_{x\to 2} 6x \overset{(2)}{=} \lim\limits_{x\to 2} 6 \lim\limits_{x\to 2} x = 6\cdot 2 = 12.$
- $\lim\limits_{x\to 2} 6x+1 \overset{(1)}{=} \lim\limits_{x\to 2} 6x + \lim\limits_{x\to 2} 1 = 12+1 = 13.$

Gränsvärdet för bråkets nämnare är inte noll, så vi kan använda resultatet för gränsvärdet av ett bråk för att ta reda på gränsvärdet:
$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2+1}{6x+1} \overset{(3)}{=} \frac{\lim\limits_{x\to 2} 3x^2+1}{\lim\limits_{x\to 2} 6x+1} = \frac{13}{13} = 1.$$

A2. Definiera $f(0)=0$ och
$$f(x)=x^3\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$
då $x\neq 0$. Visa att funktionen f är deriverbar i punkten $x=0$.

Lösning: Då $x\neq 0$, så är funktionen f en produkt av två deriverbara funktioner, varav den andra är en sammansatt funktion av två deriverbara funktioner, och således kan vi använda deriveringsregler för att bestämma derivatafunktionen f':
$$f'(x)=3x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{x^3}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=x\left(3x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Det ser ut som att $f'(x) \to 0$, då $x \to 0$. I uppgiften 6A3 visade vi följande resultat: Om derivatafunktionen har ett gränsvärde i punkten x_0 och f är deriverbar i punkten x_0, så måste det gälla $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$. Vi tar till nästa och provar visa att noll är differenskvotens gränsvärde, då $x \to 0$:

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - 0 \right| = \left| \frac{x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} \right| = \frac{|x^3| \left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|}{|x|} \leq \frac{|x^3|}{|x|} = x^2$$

Låt $\varepsilon > 0$. Vi märker följande ekvivalens:

$$x^2 < \varepsilon \iff |x| < \sqrt{\varepsilon}.$$

Bevis: Välj $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Nu gäller för alla $0 < |x| < \delta$ följande uppskattning:

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - 0 \right| = \frac{|x^3| \left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|}{|x|} \leq x^2 < \delta^2 = \varepsilon.$$

Så har vi visat att $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$. Således är funktionen f deriverbar i punkten $x = 0$ och dessutom vet vi att det är frågan om nollstället för funktionens derivata.

Obs! Att räkna ut derivatafunktionen för andra värden än $x = 0$ är inte nödvändigt i uppgiften. Man kommer i uppgiften snabbt till samma resultat fast man genast skulle börja med att betrakta differenskvotens uttryck.

A3. Anta att funktionen f är kontinuerlig på intervaller $]1, 2[$. Anta dessutom att $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$ och $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \infty$. Visa att det finns en punkt $a \in]1, 2[$ för vilken gäller att $f(a) = 7$.

Lösning:

Vi försöker begränsa något slutet intervall $[b, c] \subset]1, 2[$, för vars ändpunkter gäller:

$$f(b) < 7 < f(c).$$

Enligt antagandet är f kontinuerlig i detta intervall, så enligt Bolzanos korollarie uppnår denna funktion alla värden mellan de värden ändpunkterna ger. Särskilt hittas isåfall från intervallet $]b, c[$ en punkt a så att $f(a) = 7$.

b: $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$, så det hittas ett δ så att $|f(1x) - 3| < 1$, om $1 < x < 1 + \delta$. Därmed gäller $f(x) < 4$. Välj $b \in]1, 1 + \delta[$, vilket ger att $f(b) < 7$.

c: $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \infty$, så det hittas ett $\tilde{\delta}$ så att $f(x) > 7^{42}$, om $2 - \tilde{\delta} < x < 2$. Välj $c \in]2 - \tilde{\delta}, 2[$, vilket ger att $f(c) < 7$.

Vi har nu lyckats begränsa oss till ett slutet intervall $[b, c]$, så att $f(b) < 7 < f(c)$. Således hittas enligt Bolzanos korollarie en punkt $a \in]b, c[$, för vilket $f(a) = 7$.

A4. Definiera funktionen sinh med ekvationen

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

Visa att för alla $x \geq 0$ gäller att

$$\sinh x - \sin x \geq 0.$$

Lösning:

Sätt 1.

Vi definierar hjälpfunktionen $f(x) = \sinh(x) - \sin(x)$. Vi vill visa att $f(x) \geq 0$ för alla $x \geq 0$. Funktionen f är deriverbar för alla $x \geq 0$, så enligt medelvärdessatsen hittas då ett $\xi \in]0, x[$, för vilket

$$\begin{aligned} &f(x) - f(0) = (x-0)f'(\xi) \\ \Rightarrow &f(x) = xf'(\xi) + f(0) \end{aligned}$$

Vi räknar till näst $f(0)$ och $f'(x)$, så vi kan uppskatta uttrycket ovan för $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{2}(e^0 - e^0) - \sin(0) = 0. \\ f'(x) &= D\left(\frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) - \sin(x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) - \cos(x). \end{aligned}$$

Vi betraktar ännu termen $\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ som uppkommer i derivatafunktionen. För detta definierar vi $\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$. Nu är cosh deriverbar, så enligt medelvärdessatsen hittas ett $\xi \in]0, x[$, för vilket:

$$\begin{aligned} \cosh(x) - \cosh(0) &= (x-0)D\cosh(\xi) \\ \Rightarrow \cosh(x) &= \cosh(0) + xD\cosh(\xi) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^0 + e^0\right) + x\frac{1}{2}\left(e^\xi - e^{-\xi}\right) \\ &= 1 + x\frac{1}{2}\left(e^\xi - e^{-\xi}\right) \geq 1. \end{aligned}$$

Med denna information tar vi oss nu tilbaka för att uppskatta värdet $f(x)$, då $x \geq 0$ och $\xi \in]0, x[$:

$$\begin{aligned} f(x) &= xf'(\xi) + f(0) \\ &= x(\cosh(\xi) - \cos(\xi)) + 0 \\ &\geq 0(1-1) + 0 = 0 \end{aligned}$$

Vi fick alltså visat att det för alla $x \geq 0$ gäller $f(x) \geq 0$, alltså $\sinh(x) - \sin(x) \geq 0$.

Sätt 2.

Vi definierar hjälpfunktionen $f(x) = \sinh(x) - \sin(x)$. Vi vill visa att $f(x) \geq 0$ för alla $x \geq 0$. Vi märker att

$$f(0) = \sinh(0) - \sin(0) = \frac{1}{2}\left(e^0 - e^0\right) - 0 = 0 \geq 0.$$

Vi betraktar den första och andra derivatan av funktionen f:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) - \cos(x)$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) + \sin(x)$$

Vi märker att även $f'(0) = 0$ och $f''(0) = 0$.

Vi tar och betraktar andra derivatan noggrannare:

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) + \sin(x) \geq \frac{1}{2}(1-1) + 0 = 0, \text{ då } x \in [0, \pi].$$

Då $x > \pi$ så kan vi göra följande uppskattning:

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) + \sin(x) \geq \frac{1}{2}\left(e^\pi - 1\right) - 1 \approx 10 \geq 0.$$

Den andra derivatan f'' är alltså icke-negativ för alla $x \geq 0$. Således är f' växande och vidare gäller $f'(x) \geq f'(0) = 0$ för alla $x \geq 0$. Nu är även funktionen f växande, alltså gäller $f(x) \geq f(0) = 0$ för alla $x \geq 0$.

Därmed har vi visat att för alla $x \geq 0$ gäller

$$f(x) = \sinh(x) - \sin(x) \geq 0.$$

A5. (Uppgift 6.2.12 i [HKK]) Visa att

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Lösning: I detta bevis anpassar vi bokens bevis för Lemma 6.2.5. (*Exponentfunktionens derivata i origo är 1.*) I boken bevisas det högra gränsvärdet för uttrycket i denna uppgift.
De viktigaste observationerna om talföljder vi använder oss av:

$$e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{för alla } n \in \mathbb{N}_1. \tag{1}$$

$$\frac{1}{e} > \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{för alla } n \in \mathbb{N}_1. \tag{2}$$

Å andra sidan konvergerar talföljderna ovan mot e och $\frac{1}{e}$, då n växer obegränsat.

Till näst visar vi i några skeden att det för talen n och $n+1$ gäller:

$$-\frac{1}{n} < e^{-\frac{1}{n}} - 1 < -\frac{1}{n+1},$$

där det i de två mellersta uttrycken förekommer differenskvotens täljare med två negativa tal.

(1) $\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$ för alla $n \in \mathbb{N}_1$. Då gäller:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e \iff \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} > e^{-\frac{1}{n}} \iff 1 - \frac{1}{n+1} > e^{-\frac{1}{n}} \iff -\frac{1}{n+1} > e^{-\frac{1}{n}} - 1.$$

(2) $\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{e}$ för alla $n \in \mathbb{N}_1$. Då gäller:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{e} \iff 1 - \frac{1}{n} < e^{-\frac{1}{n}} \iff -\frac{1}{n} < e^{-\frac{1}{n}} - 1.$$

Låt $-1 < x < 0$. Välj nu $n_x \in \mathbb{N}_1$ så att $n_x \leq -\frac{1}{x} < n_x + 1$. Då gäller

$$-\frac{1}{n_x} \leq x < -\frac{1}{n_x + 1}.$$

Därmed gäller det för n_x att:

$$-\frac{1}{n_x} < e^{-\frac{1}{n_x}} - 1 < e^x - 1 < e^{-\frac{1}{n_x+1}} - 1 < -\frac{1}{n_x+2}$$

Från detta får vi följande uppskattning för differenskvoten (kom ihåg att $x < 0$):

$$-\frac{1}{x(n_x+2)} < \frac{e^x - 1}{x} < -\frac{1}{xn_x}$$

Då vi ännu tillägger i denna uppskattning att $n_x \leq -\frac{1}{x} < n_x + 1$, så får vi att

$$\frac{n_x}{n_x+2} < \frac{e^x - 1}{x} < \frac{n_x+1}{n_x}$$

Då $x \to 0^-$, så gäller $n_x \to \infty$, så enligt uppskattningen ovan gäller:

$$1 = \lim_{n_x \to \infty} \frac{n_x}{n_x+2} \leq \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} \leq \lim_{n_x \to \infty} \frac{n_x+1}{n_x} = 1.$$

Alltså gäller:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

A6. (Uppgift 6.5.13 i [HKK]) Bestäm gränsvärdena

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{\ln(1+x^2)} \quad \text{och} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln(1+x^2)}.$$

(Bekanta dig vid behov med de relevanta delarna av kapitel 6.5.) *Lösning:*

I bokens kapitel 6.5. presenteras ett antal resultat kända som L'Hôpitals regler. Av dessa regler behöver vi resultaten som presenteras i satserna 6.5.2. och 6.5.7. Som en helhet kan L'Hôpitals regler sammanfatttas på följande vis:

Om funktionerna f och g är deriverbara i mängden A, förutom i punkten $a \in A$, och

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0 \text{ eller } \pm\infty.$$

Då, ifall $g(x) \neq 0$ för alla $x \in A$, så gäller för funktionernas kvot:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Motsvarande resultat är i kraft också för gränsvärden $x \to \infty$ och $x \to -\infty$.

I bråkuttrycken som ges i uppgiften är funktionerna $\ln(1+x)$ och $\ln(1+x^2)$ deriverbara i intervallet $]0, \infty[$. I detta intervall gäller även $\ln(1+x^2) \neq 0$ och

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(1+x) = \lim_{x \to 0^+} \ln(1+x^2) = 0,$$

samt

$$\lim_{x \to \infty} \ln(1+x) = \lim_{x \to \infty} \ln(1+x^2) = \infty.$$

Vi kan alltså använda L'Hôpitals regel. Vi deriverar täljaren och nämnaren:

$$D(\ln(1+x)) = \frac{1}{1+x}$$
$$D(\ln(1+x^2)) = \frac{2x}{1+x^2}$$

Till näst betraktar vi värdena $x \in (0,1)$ och kollar bråket av täljarens och nämnarens derivator:

$$\frac{D(\ln(1+x))}{D(\ln(1+x^2))} = \frac{1+x^2}{2x(1+x)} > \frac{1}{2x(1+1)} = \frac{1}{4x} \to \infty, \text{ då } x \to 0^+.$$

Eftersom $\frac{1}{4x}$ växer obegränsat då $x \to 0^+$, så måste även uttrycket $\frac{D(\ln(1+x))}{D(\ln(1+x^2))}$ växa obegränsat. Nu får vi för det ursprungliga uttrycket resultatet:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{\ln(1+x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{D(\ln(1+x))}{D(\ln(1+x^2))} = \infty.$$

Vi betraktar till nästa derivatornas kvot, då x växer obegränsat:

$$\begin{aligned}\frac{D(\ln(1+x))}{D(\ln(1+x^2))} &= \frac{1+x^2}{2x(1+x)} = \frac{x^2(1+\frac{1}{x^2})}{x^2(2+2\frac{1}{x^2})} = \frac{1+\frac{1}{x^2}}{2+2\frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{1+\frac{1}{x}\frac{1}{x}}{2+2\frac{1}{x}\frac{1}{x}} \overset{3.1.11.}{\to} \frac{1+0\cdot 0}{2+2\cdot 0\cdot 0} = \frac{1}{2}, \text{ då } x \to \infty.\end{aligned}$$

På detta vis får vi gränsvärdet för det ursprungliga uttrycket:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{D(\ln(1+x))}{D(\ln(1+x^2))} = \frac{1}{2}.$$