HU / Institutionen för matematik och statistik
Differentialkalkyl, hösten 2016
Övning 6 – Modellösningar

L1. Vi betraktar funktionen $f\colon [1,3] \to \mathbb{R}$. Anta att f är kontinuerlig i intervallet $[1,3]$ och deriverbar i intervallet $]1,3[$. Anta dessutom att för alla $x \in]1,3[$ gäller att $2 \leq f'(x) \leq 4$ samt att $f(1) = 5$. Vad kan man säga om värdet $f(3)$?

Lösning: Vi använder oss i uppgiften av medelvärdessatsen (Sats 5.3.5). Eftersom funktionen är kontinuerlig i det slutna intervallet $[a,b]$ och deriverbar i det öppna intervallet $]a,b[$ så existerar ett $\xi \in]a,b[$, för vilket

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

Alltså finns ett $\xi \in]1,3[$, för vilket

$$\begin{aligned} &f(3) - f(1) = f'(\xi)(3-1) \\ \Leftrightarrow &f(3) = f'(\xi)(3-1) + f(1) \\ \Leftrightarrow &f(3) = 2f'(\xi) + 5 \end{aligned}$$

för alla $x \in]1,3[$ gäller $2 \leq f'(x) \leq 4$, så det samma gäller också för $f'(\xi)$, eftersom $\xi \in]1,3[$. Då gäller $2 \cdot 2 + 5 \leq f(3) \leq 2 \cdot 4 + 5$ alltså $9 \leq f(3) \leq 13$.

L2. Vi betraktar funktionen $f\colon [1,3] \to \mathbb{R}$. Anta att f är kontinuerlig i intervallet $[1,3]$ och deriverbar i intervallet $]1,3[$. Anta dessutom att för alla $x \in]1,3[$ gäller att $2 \leq f'(x) \leq 4$ samt att $f(3) = 5$. Vad kan man säga om värdet $f(1)$?

Lösning: Vi använder oss av medelvärdessatsen på samma vis som första uppgiften. Det existerar ett $\xi \in]1,3[$, för vilket

$$\begin{aligned} &f(3) - f(1) = f'(\xi)(3-1) \\ \Leftrightarrow &-f(1) = f'(\xi)(3-1) - f(3) \\ \Leftrightarrow &-f(1) = 2f'(\xi) - 5 \end{aligned}$$

för alla $x \in]1,3[$ gäller $2 \leq f'(x) \leq 4$, så det samma gäller för $f'(\xi)$ eftersom $\xi \in]1,3[$. Då gäller $2 \cdot 2 - 5 \leq -f(1) \leq 2 \cdot 4 - 5 \Leftrightarrow -1 \leq -f(1) \leq 3$ alltså $-3 \leq f(1) \leq 1$.

L3. Anta att funktionen $f\colon]1,3[\to \mathbb{R}$ satisfierar villkoret $f'(2) = 5$. Bestäm

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+5h) - f(2-7h)}{3h}.$$

Tips: Modifiera det uttryck som studeras så att du får fram differenskvoterna

$$\frac{f(2+5h) - f(2)}{5h} \quad \text{och} \quad \frac{f(2-7h) - f(2)}{-7h}.$$

Lösning: Vi följer tipset och försöker omformulera uttrycket så att att vi får differenskvoterna ovan

$$\begin{aligned} \frac{f(2+5h) - f(2-7h)}{3h} &= \frac{f(2+5h) - f(2) + f(2) - f(2-7h)}{3h} \\ &= \frac{f(2+5h) - f(2)}{3h} + \frac{f(2) - f(2-7h)}{3h} \\ &= \frac{f(2+5h) - f(2)}{3h} + \frac{f(2-7h) - f(2)}{-3h} \\ &= \frac{5}{3} \cdot \frac{f(2+5h) - f(2)}{5h} + \frac{7}{3} \cdot \frac{f(2-7h) - f(2)}{-7h} \end{aligned}$$

Funktionen f uppfyller kravet $f'(2) = 5$, alltså har funktionen följande differenskvot vid punkten 2

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 5.$$

Dessutom vet vi att $5h \to 0$ och $-7h \to 0$, då $h \to 0$, och att konstanten $a \to a$ då $h \to 0$. Siis

$$\lim_{h \to 0} \frac{5}{3} \cdot \frac{f(2+5h) - f(2)}{5h} + \frac{7}{3} \cdot \frac{f(2-7h) - f(2)}{-7h} = \frac{5}{3} \cdot 5 + \frac{7}{3} \cdot 5 = 20.$$

L4. Anta att funktionen $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$ är deriverbar åtminstone i intervallen $]-1,0[$ och $]0,1[$, samt dessutom kontinuerlig i punkten $x = 0$. Anta att

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} f'(x).$$

Visa att f är deriverbar i punkten $x = 0$ samt att

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = f'(0).$$

Lösning: Vi betraktar först den positiva sidan och antar att $0 < h < 1$. Nu hittar vi en punkt $\xi \in]0,h[$, beroende av h, för vilket det enligt medelvärdessatsen gäller

$$f'(\xi) = \frac{f(h) - f(0)}{h}.$$

Således om gränsvärdena existerar så gäller också

$$\lim_{h \to 0^+} f'(\xi) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

Eftersom funktionen f' har ett gränsvärde då $x \to 0^+$, så gäller enligt definitionen $|f'(x) - A| < \varepsilon$, då $0 < x < \delta$, där $A \in \mathbb{R}$. Eftersom $\xi \in]0,h[$, så $0 < \xi < h$. Om $h < \delta$, så gäller också $\xi < \delta$. Å andra sidan gäller $h \to 0^+$, så vi får att $h < \delta$. Således gäller $|f'(\xi) - A| < \varepsilon$. Nu gäller

$$\lim_{h \to 0^+} f'(\xi) = \lim_{x \to 0^+} f'(x)$$

Eftersom

$$\lim_{h \to 0^+} f'(\xi)$$

nu existerar, så existerar även

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}.$$

Således existerar $f'(0)$ och $f'(0) = \lim_{h \to 0^+} f'(\xi) = \lim_{x \to 0^+} f'(x)$

Motsvarligen kan vi bevisa den negativa sidan genom att anta $-1 < h < 0$. Då får vi att $f'(0) = \lim_{h \to 0^-} f'(\xi) = \lim_{x \to 0^-} f'(x)$.

Nu har vi visat att f är deriverbar vid punkten $x = 0$ och att

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = f'(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x).$$

L5. Definiera funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genom $f(0) = 0$ och

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \neq 0.$$

Visa att f är deriverbar i hela mängden av reella tal.

Lösning: Förutom vid nollan är funktionen f deriverbar, eftersom den är en produkt av två deriverbara funktioner. ($\sin(\frac{1}{x^2})$ är en sammansatt funktion av två deriverbara funktioner). Vi koncentrerar oss på att undersöka problempunkten $x = 0$. Vi betraktar de oliksidade gränsvärden av funktionens differenskvot vid punkten $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \quad \text{och} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Så att funktionen skulle vara deriverbar också vid punkten $x = 0$, så måste differenskvotens oliksidade gränsvärden vara samma och gränsvärdet ska vara $f'(0)$ (Sats 5.1.10). Vi betraktar först fallet då $x \to 0^+$. Alltså betraktar vi till först absolutbeloppet av följande differens,

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - 0 \right| = \left| \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x^2})}{x} \right| = \left| x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \right|$$

Eftersom $\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ får värden från intervallet $[-1, 1]$, så kan vi göra följande uppskattning

$$\left| x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \right| \leq |x| \leq x$$

Vi antar att $\varepsilon > 0$. Välj $\delta = \varepsilon$. Nu gäller

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - 0 \right| = \left| x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \right| \leq x < \delta = \varepsilon,$$

då $0 < x < \delta$.

Vi betraktar till näst fallet då $x \to 0^-$. Alltså betraktar vi följande absolutbelopp absolutbelopp av differensen

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - 0 \right| = \left| x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \right| \leq |x| = -x$$

Vi antar att $\varepsilon > 0$. Välj $\delta = \varepsilon$. Nu gäller

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - 0 \right| = \left| x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \right| \leq -x < \delta = \varepsilon,$$

då $-\delta < x < 0$.

Därmed gäller

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

Differenskvoternas oliksidade gränsvärden är lika stora och $f'(0) = 0$, så funktionen f är deriverbar också vid punkten $x = 0$. Funktionen f är alltså deriverbar över hela reella talaxeln.

L6. Visa att derivatafunktionen f' till funktionen f i uppgift L5 inte är begränsad i intervallet $[-1, 1]$. Förklara varför det följer att derivatafunktionen inte kan vara kontinuerlig i detta slutna intervall.

Lösning: Den förra uppgiftens derivatafunktion var

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x},$$

då $x \neq 0$ och $f'(0) = 0$. Vi betraktar funktionen då $x > 0$. Vi vill visa att funktionen alltid kan fås större än något M, så vi tar och uppskattar uttrycket neråt:

$$2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x} \geq 2x \cdot (-1) - \frac{2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x}.$$

För alla $\delta > 0$, då $0 < x < \delta$, så existerar ett sådant x, för vilket $\frac{1}{x^2} = 2n\pi + \pi$ för något $n \in \mathbb{N}$. Då gäller $\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = -1$. Eftersom vi vill visa att derivatafunktionen inte är begränsad, så räcker det med en punkt från intervallet $[-1, 1]$ där derivatafunktionen är större än ett godtyckligt M. Vi kan därför begränsa oss till att undersöka de punkter x för vilka ovanvarande krav uppfylls. Nu gäller

$$2x \cdot (-1) - \frac{2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x} = -2x + \frac{2}{x} \geq -2 + \frac{2}{x}.$$

Vi märker följande ekvivalens

$$-2 + \frac{2}{x} > M \Leftrightarrow \frac{2}{M+2} > x.$$

Låt $M \in \mathbb{R}$. Välj $\delta = \frac{2}{M+2}$. Nu existerar ett sådant x, att

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x} \geq -2 + \frac{2}{x} \geq -2 + \frac{2}{\frac{2}{M+2}} = M,$$

för vilket $0 < x < \delta$. Vi hittade nu någon punkt $x \in [-1, 1]$, där derivatans värde är större än M. Således kan vi säga att derivatafunktionen f' inte är begränsad i intervallet $[-1, 1]$.