HU / Institutionen för matematik och statistik
Differentialkalkyl, hösten 2016
Övning 6 – Modellösningar

A1. Vi betraktar funktionerna som definieras av ekvationerna $f(x) = x + 2\sin x$ och $g(x) = x + \sin x$ i hela mängden av reella tal.

a) Utred de lokala extremvärdena till funktionen f.

b) Utred de lokala extremvärdena till funktionen g.

Lösning:
a) Genom att derivera funktionen f får vi att $f'(x) = 1 + 2\cos x$. Derivatan får värdet noll då $\cos x = -1/2$, alltså

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \quad \text{eller} \quad x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n,$$

där $n \in \mathbb{Z}$. Funktionen får sina extremvärden vid derivatans nollställen, så vi börjar betrakta dessa punkter.

(1) I punkten $x = \pi + 2\pi n$, där $n \in \mathbb{Z}$, gäller $f'(\pi + 2\pi n) = 1 + 2\cos(\pi + 2\pi n) = -1$. Funktionen f' är kontinuerlig och får ett negativt värde vid en punkt i intervallet $(2\pi/3 + 2\pi n, 4\pi/3 + 2\pi n)$, och inte värdet noll vid något av intervallets punkter.

Nu vet vi att alla värden av derivatafunktionen f på intervallet är negativa, annars skulle f' positiva värden på intervallet. Då borde den enligt Bolzanos korollarie (Korollarie 4.2.2.) få värdet noll, vilket den inte får. Funktionen f är alltså avtagande på intervallet $(2\pi/3 + 2\pi n, 4\pi/3 + 2\pi n)$.

(2) I punkten $x = 2\pi n$, där $n \in \mathbb{Z}$, gäller $f'(2\pi n) = 1 + 2\cos(2\pi n) = 3$. Funktionen f' är kontinuerlig och får ett positivt värde vid en punkt i intervallet $(4\pi/3 + 2\pi n, 8\pi/3 + 2\pi n)$, och inte värdet noll vid något av intervallets punkter.

Nu vet vi att alla värden av derivatafunktionen f på intervallet är negativa, annars skulle f' positiva värden på intervallet. Då borde den enligt Bolzanos korollarie (Korollarie 4.2.2.) få värdet noll, vilket den inte får. Funktionen f är alltså avtagande på intervallet $(4\pi/3 + 2\pi n, 8\pi/3 + 2\pi n)$.

Således gäller det i närheten av punkten $x = 2\pi/3 + 2\pi n$ för funktionen att $f(2\pi/3 + 2\pi n) \geq f(x)$. Alltså får funktionen sina lokala maksimin vid punkterna

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n.$$

För funktionen gäller även $f(4\pi/3 + 2\pi n) \leq f(x)$ i närheten av punkten $x = 4\pi/3 + 2\pi n$, så de lokala minimina får vi vid punkterna

$$x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n.$$

b) Genom att derivera funktionen g får vi att $g'(x) = 1 + \cos x$. Derivatafunktionen är alltid icke-negativ, eftersom $g'(x) = 1 + \cos x \geq 1 - 1 = 0$. Dessutom är derivatafunktionen noll endast vid enskilda punkter, så funktionen g är strikt växande och har därmed inga lokala extremvärden.

A2. (Uppgift 5.3.20 från [HKK]) Hur stort fel gör man högst när man beräknar värdet av uttrycket $\sqrt{\pi}$ genom att använda närmevärdet $3,14$ för talet π. *Tips:* jämför med feluppskattningen i uppgift 5.3.19 i [HKK].

Lösning:
Vi definierar funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med ekvationen $f(x) = \sqrt{x}$. Funktionen f är deriverbar i intervallet $(3, 4)$ och derivatafunktionen är av formen

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Vi kan uppskatta derivatafunktionens värden uppåt

$$|f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} \leq \frac{1}{2}.$$

Nu gäller enligt uppgift 5.3.19 att

$$|f(3.14) - f(\pi)| \leq \frac{1}{2}|3.14 - \pi| < \frac{1}{2}|0.002| = \frac{1}{1000}.$$

Felet är alltså mindre än en tusendedel.

A3. Anta att funktionen $f\colon]-1, 1[\to \mathbb{R}$ är deriverbar i hela definitionsintervallet. Anta att de ensidiga gränsvärdena

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) \text{ och } \lim_{x\to 0^+} f'(x)$$

existerar. Visa att då gäller att

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = f'(0).$$

Lösning:
(1) Vi betraktar först den positiva sidan och antar att $0 < h < 1$. Nu hittas en punkt $\xi \in (0, h)$ som är beroende av h, så det enligt medelvärdessatsen gäller

$$f'(\xi) = \frac{f(h) - f(0)}{h}.$$

Funktionen f är deriverbar, alltså existerar gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

och för den gäller

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0).$$

Vi betecknar antagandet för gränsvärdet $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = A$. Från existensen av gränsvärdet följer att det för varje $\varepsilon > 0$ hittas ett $\delta > 0$ så att

$$|f'(x) - A| < \varepsilon, \quad \text{då} \quad 0 < x < \delta.$$

Vi vet att $\xi < h$, så alltså om $h < \delta$ så $\xi < \delta$. Vi betraktar differenskvotens avstånd från det förra gränsvärdet genom att använda samma δ för varje ε såsom ovan och genom att använda medelvärdessatsen:

$$\left|\frac{f(h) - f(0)}{h} - A\right| = |f'(\xi) - A| < \varepsilon, \quad \text{då} \quad 0 < h < \delta.$$

Nu gäller enligt definitionen för en funktions gränsvärde $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = A$. Gränsvärdena $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ och $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$ är alltså desamma. Genom att slå samman informationen ovan får vi

$$f'(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{x\to 0^+} f'(x).$$

(2) Vi betraktar till näst den negativa sidan och antar att $-1 < h < 0$. Nu hittas en punkt $\xi \in (h, 0)$ som är beroende av h, så det enligt medelvärdessatsen gäller

$$f'(\xi) = \frac{f(0)-f(h)}{-h}.$$

Funktionen f är deriverbar, så gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0)-f(h)}{-h}$$

existerar och har värdet

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0)-f(h)}{-h} = f'(0).$$

Vi betecknar antagandet för gränsvärdet $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = A$. Från existensen av gränsvärdet följer att det för varje $\varepsilon > 0$ hittas ett $\delta > 0$ så att

$$|f'(x) - A| < \varepsilon, \quad \text{då} \quad -\delta < x < 0.$$

Vi vet att $\xi < h$, så alltså om $h < \delta$ så $\xi < \delta$. Vi betraktar differenskvotens avstånd från det förra gränsvärdet genom att använda samma δ för varje ε såsom ovan och genom att använda medelvärdessatsen:

$$\left|\frac{f(0)-f(h)}{-h} - A\right| = |f'(\xi) - A| < \varepsilon, \quad \text{då} \quad -\delta < h < 0.$$

Nu gäller enligt definitionen för en funktions gränsvärde $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0)-f(h)}{-h} = A$. Gränsvärdena $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ och $\lim_{x\to 0^-} f'(x)$ är alltså desamma. Genom att slå samman information ovan får vi att

$$f'(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0)-f(h)}{-h} = \lim_{x\to 0^-} f'(x).$$

Nu är påståendet bevisat.

A4. Anta att funktionen $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$ är deriverbar åtminstone i intervallet $]0,1[$ samt att

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \infty.$$

Visa att funktionen f inte är deriverbar i punkten $x = 0$.

Lösning:
Vi gör motantagandet att f är deriverbar vid punkten $x = 0$. Vi antar att $0 < h < 1$. Nu hittar vi ett $\xi \in (0, h)$ som är beroende av h, så det enligt medelvärdessatsen gäller

$$f'(\xi) = \frac{f(h)-f(0)}{h}.$$

Funktionen f är deriverbar över det halvöppna intervallet $[0,1)$, alltså existerar gränsvärdet

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}.$$

Från existensen av gränsvärdet $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \infty$ följer att det för varje $m \in \mathbb{R}$ hittas ett $\delta > 0$ så att

$$f'(x) > m, \quad \text{då} \quad 0 < x < \delta.$$

Vi vet att $\xi < h$, så alltså om $h < \delta$ så $\xi < \delta$. Vi betraktar differenskvotens storlek genom att använda samma δ för varje m såsom ovan och genom att använda medelvärdessatsen:

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(\xi) > m, \quad \text{då} \quad 0 < h < \delta.$$

Nu följer från gränsvärdets definition att

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \infty.$$

Gränsvärdet av differenskvotens högra sida är enligt antagandet inte begränsat, alltså är funktionen inte deriverbar vid noll på högra sidan och därmed inte deriverbar vid noll. Således är motantagandet falskt och det ursprungliga påståendet gäller.