HU / Institutionen för matematik och statistik
Differentialkalkyl, hösten 2016
Övning 5 – Modellösningar

L1. Visa på basen av definitionerna av potenser (med heltalsexponenter) och rötter (med heltal som ordning) att de två definitionerna

$$2^{\frac{3}{5}} = \left(\sqrt[5]{2}\right)^3$$

och

$$2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}$$

av bråktalspotensen $2^{\frac{3}{5}}$ ger samma resultat.

Lösning: Vi använder i lösningen följande information:

(1) $(x^n)^m = x^{n\cdot m} = (x^m)^n$ för alla $x \in \mathbb{R}$ och $m, n \in \mathbb{N}$. Detta kan bevisas med induktion direkt från definitionen för potensfunktionen (med heltalsexponenter), men vi hoppar över beviset här; se Sats 1.4.2.

(2) Då $n \in \mathbb{N}$ är udda, så är funktionen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$ en invers funktion för funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ (Definition 4.2.6). Med andra ord, så gäller för alla $x \in \mathbb{R}$ att

$$f(g(x)) = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x \quad \text{och} \quad g(f(x)) = \sqrt[n]{x^n} = x.$$

Lösningen kan formuleras på flera sätt. Nedan finns ett par lösningsförslag.

Sätt 1. Talet $\sqrt[5]{2^3}$ är sådant att dess femte potens är 2^3. Alltså gäller

$$\left(\sqrt[5]{2^3}\right)^5 = 2^3\,,$$

där vi använde oss av (2). Vi tar och betraktar femte potensen av det andra givna talet $\left(\sqrt[5]{2}\right)^3$:

$$\left(\left(\sqrt[5]{2}\right)^3\right)^5 = \left(\left(\sqrt[5]{2}\right)^5\right)^3 = 2^3\,,$$

där vi till först använde oss av (1), och sedan (2). Femte potensen av båda givna talen är alltså samma. Eftersom en potensfunktion med udda exponent är strängt växande (och därmed en *injektion*!), så måste talen vara de samma. (Märk att samma sak inte gäller för jämna rötter, exempelvis kvadratroten, eftersom t.ex. talet 4 har två rötter, $x = \pm 2$!)

Sätt 2. Hela den förra deduktionen kan sammanfattas till en rad:

$$\left(\sqrt[5]{2}\right)^3 = \sqrt[5]{\left(\left(\sqrt[5]{2}\right)^3\right)^5} = \sqrt[5]{\left(\left(\sqrt[5]{2}\right)^5\right)^3} = \sqrt[5]{2^3}$$

Obs. Beteckningarna

$$\sqrt[n]{x} \quad \text{och} \quad x^{\frac{1}{n}}$$

är helt enkelt varandras synonymer; påståendet kan alltså också skrivas i formen

$$\left(2^{\frac{1}{5}}\right)^3 = \left(2^3\right)^{\frac{1}{5}}\,.$$

Uppgiften visade att båda formerna ger samma resultat, så följande definition för *bråkpotenser* torde vara vettig: beteckna

$$2^{\frac{3}{5}} = \left(2^{\frac{1}{5}}\right)^3 = \left(2^3\right)^{\frac{1}{5}}.$$

Bråkpotenser används ofta eftersom de bildar lätta uttryck och har enkla räkneregler men ett ord av varning: den allmäna bråkpotensen $x^{\frac{n}{m}}$ är **inte** definierad då $x \le 0$, och därför är det bättre att hålla sig till rotuttryck.

L2. Derivera den funktion som definieras av uttrycket $f(x) = \sqrt[5]{x}$ med hjälp av räknereglerna för potenser och för den inversa funktionen.

Lösning: Vi definierar funktionen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med ekvationen $g(x) = x^5$. Enligt definitionen är rotfunktionen $f(x) = \sqrt[5]{x}$ den inversa funktionen av funktionen g, alltså $f = g^{-1}$. Enligt potensfunktionens deriveringsregel gäller att

$$g'(x) = 5x^4.$$

Kraven för deriveringsregeln av inversa funktioner (Sats 5.2.13) uppfylls: g är kontinuerlig, deriverbar och $g'(x) \neq 0$, då $x \neq 0$. Nu kan vi räkna ut den inversa funktionens derivata i punkten $x \neq 0$:

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$$

alltså

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{g'(\sqrt[5]{x})} = \frac{1}{5(\sqrt[5]{x})^4}$$

(Vid punkten $x = 0$ är derivatan av funktionen f inte definierad. Läs också observeringen i slutet av uppgift A1 av denna vecka.)

L3. Derivera de funktioner som definieras av följande uttryck:

(a) $f(x) = \cos(3x)$;

(b) $g(x) = (\cos(3x))^2 + 1$;

(c) $h(x) = \sqrt{(\cos(3x))^2 + 1}$.

Lösning: (a) Vi använder kedjeregeln (Sats 5.2.11; se som exempel också uppgift A2 från denna vecka). Nu gäller

$$f'(x) = -\sin(3x) \cdot 3 = -3\sin(3x).$$

(b) Vi använder igen kedjeregeln. För att underlätta beteckningen definierar vi funktionen j med uttrycket $j(x) = x^2 + 1$, och därmed gäller $j'(x) = 2x$. Dessutom är

$$g(x) = (f(x))^2 + 1 = j(f(x)),$$

så

$$g'(x) = j'(f(x))f'(x) = 2f(x)f'(x) = 2\cos(3x) \cdot (-3\sin(3x)) = -6\sin(3x)\cos(3x)$$

(c) Vi använder än en gång kedjeregeln. Vi definierar en hjälpfunktion k med uttrycket $k(x) = \sqrt{x}$, och därmed gäller $k'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Dessutom gäller

$$h(x) = \sqrt{g(x)} = k(g(x)),$$

så

$$h'(x) = k'(g(x))g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}}g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(\cos(3x))^2+1}} \cdot (-6\sin(3x)\cos(3x))$$
$$= -\frac{3\sin(3x)\cos(3x)}{\sqrt{(\cos(3x))^2+1}}$$

L4. Härled (på nytt) deriveringsregeln för produktfunktionen (dvs. Leibniz regel) med hjälp av Satserna 5.2.9 och 5.2.10 i [HKK]. *Tips:* multiplicera ledvis differentialuttrycken

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + hu(h)$$

och

$$g(x_0+h) = g(x_0) + g'(x_0)h + hv(h)$$

som hör till ovanstående satser. (Kommentar: Leibniz regel härleddes på föreläsningen onsdag 23.11 med hjälp av "produkttricket".)

Lösning: Vi slår fast ett $x_0 \in \mathbb{R}$. Anta att f och g är deriverbara i punkten x_0. Då kan vi enligt Sats 5.2.9 skriva

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + hu(h)$$

och

$$g(x_0+h) = g(x_0) + g'(x_0)h + hv(h),$$

där $u(h) \to 0$ och $v(h) \to 0$, då $h \to 0$.

Vi följer tipset och multiplicerar ekvationerna ledvis. På den högra sidan får vi nio termer, som vi får med lite ordning till formen

$$f(x_0+h)g(x_0+h) = f(x_0)g(x_0) + (f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0))h + h\mathbf{w}(\mathbf{h}), \qquad (1)$$

där

$$\mathbf{w}(\mathbf{h}) = f(x_0)v(h) + g(x_0)u(h) + f'(x_0)g'(x_0)h$$
$$+ f'(x_0)v(h)h + g'(x_0)u(h)h + u(h)v(h)h.$$

Ovan är $f(x_0)$, $g(x_0)$, $f'(x_0)$ och $g'(x_0)$ konstanter och konvergerar därmed till sig själva, och enligt antagandet $u(h) \to 0$, $v(h) \to 0$ och förstås $h \to 0$, då $h \to 0$. Genom att använda Sats 3.11 märker vi att alla sex termer i summan ovan konvergerar mot noll, då $h \to 0$, och vidare $\mathbf{w}(\mathbf{h}) \to 0$, då $h \to 0$.

Vi definierar funktionen d med ekvationen $d(x) = f(x)g(x)$. Ekvation (1) kan nu skrivas i formen

$$d(x_0+h) = d(x_0) + ah + h\mathbf{w}(\mathbf{h}),$$

där $\mathbf{w}(\mathbf{h}) \to 0$, då $h \to 0$. Enligt Sats 5.2.10 är d deriverbar i punkten x_0 och dess derivata är

$$d'(x_0) = a = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$$

vilket vi ville visa.

L5. (Uppgift 5.3.17 från [HKK]) Visa med hjälp av medelvärdessatsen att

$$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$$

för alla $x > 0$.

Lösning: Medelvärdessatsen talar om sambandet mellan funktionens derivata och dess värden, så vi definierar till först en funktion som vi vill betrakta. Funktionen kan väljas på flera olika vis, nedan finns två exempellösningar.

Sätt 1. Låt $x \in \mathbb{R}$. Välj $f : [0, x] \to \mathbb{R}$,

$$f(y) = \sqrt{1+y}\,.$$

Funktionen f är kontinuerlig (i hela intervallet) och deriverbar (i intervallets inre punkter), så medelvärdessatsen kan tillämpas. Satsen säger att det existerar ett $\xi \in]0, x[$, för vilket

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}\,,$$

av vilket vi löser ut

$$\sqrt{1+x} = 1 + f'(\xi)x\,.$$

Det gäller att $\xi \in]0, x[$ alltså särskilt $\xi > 0$. Till sist märker vi att

$$f'(y) = \frac{1}{2\sqrt{1+y}} < \frac{1}{2\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}\,, \qquad \text{då } y > 0.$$

Därmed gäller

$$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x\,.$$

Vi antog inte av talet x något annat än att $x > 0$, så resultatet gäller *för alla* $x > 0$.

Sätt 2. Låt $x \in \mathbb{R}$. Välj $f : [0, x] \to \mathbb{R}$,

$$f(y) = 1 + \frac{1}{2}y - \sqrt{1+y}\,.$$

Vi vill visa att $f(x) > 0$. Funktionen f är kontinuerlig (i hela intervallet) och deriverbar (i intervallets inre punkter), så medelvärdessatsen kan tillämpas. Satsen säger att det existerar ett $\xi \in]0, x[$, för vilket

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}\,,$$

alltså

$$f(x) = f'(\xi)x\,.$$

Det gäller $\xi \in]0, x[$ alltså särskilt $\xi > 0$. Till sist märker vi att

$$f'(y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1+y}} > \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1+0}} = 0\,, \qquad \text{då } y > 0.$$

Därmed gäller $f'(\xi) > 0$. Eftersom det också gäller $x > 0$, så gäller för produkten $f(x) > 0$ som är en produkt av två positiva tal. Vi antog inte något annat om talet x än att det är $x > 0$, så det slutliga resultatet gäller *för alla* $x > 0$.

L6. (Uppgift 5.3.24) Anta att a, b och c är reella tal samt att $a > 0$. Definiera funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med ekvationen

$$f(x) = x^4 + ax^2 + bx + c.$$

Visa att funktionen f har högst två olika nollställen (dvs. rötter).

Lösning: Vi räknar till först derivatorna f' och f'':

$$f'(x) = 4x^3 + 2ax + b,$$
$$f''(x) = 12x^2 + 2a.$$

Vi märker att eftersom $a > 0$, så är $f''(x) > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Detta betyder att f' är strikt växande (Sats 5.3.12). Funktionen f' har alltså högst ett nollställe. Vi betraktar två fall:

1) Om inga nollställen existerar, så gäller antingen $f'(x) > 0$ eller $f'(x) < 0$ överallt. I detta fall är f antingen strikt växande eller strikt avtagande (Sats 5.3.12), och i båda fallen gäller att f har högst ett nollställe.

2) Till näst antar vi att det finns ett nollställe, och betecknar det med symbolen x_0. Nu gäller följande:

$$\begin{aligned} f'(x) &< 0\,, && \text{då } x < x_0, \\ f'(x) &> 0\,, && \text{då } x > x_0. \end{aligned}$$

Vi använder än en gång Sats 5.3.12, som säger att funktionen f är strikt avtagande då $x \leq x_0$, och strikt växande då $x \geq x_0$. Funktionen f har därmed högst ett nollställe inom intervallet $]-\infty, x_0]$, och högst ett nollställe inom intervallet $[x_0, \infty[$. Därmed har f totalt högst två nollställen.