HU / Institutionen för matematik och statistik
Differentialkalkyl, hösten 2016
Övning 5 – Modellösningar

A1. Derivera den funktion som definieras av uttrycket $f(x) = \sqrt[3]{x}$ med hjälp av räknereglerna för potenser och för den inversa funktionen.

Lösning: Vi definierar funktionen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med ekvationen $g(x) = x^3$. Enligt definitionen är rotfunktionen $f(x) = \sqrt[3]{x}$ den inversa funktionen för funktionen g, alltså är $f = g^{-1}$. Enligt potensfunktionens deriveringsregler gäller

$$g'(x) = 3x^2.$$

Kraven för den inversa funktionens deriveringsregel (Sats 5.2.13) uppfylls: g är kontinuerlig, deriverbar och $g'(x) \neq 0$, då $x \neq 0$. Nu kan vi räkna ut derivatan för den inversa funktionen i punkten $x \neq 0$:

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$$

alltså

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{g'(\sqrt[3]{x})} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}$$

(Vid punkten $x = 0$ är derivatan för funktionen f inte definierad.)

Obs. I bokens Sats 5.2.13 presenteras ekvationen i en lite annorlunda form än i lösningen:

$$(g^{-1})'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)}.$$

Formuleringen i lösningen följer ändå genom att ersätta x med talet $g^{-1}(x)$, eftersom det enligt definitionen för en invers funktion gäller att $g(g^{-1}(x)) = x$.

A2. Derivera den funktion som definieras av uttrycket $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ med hjälp av räknereglerna för potenser, den inversa funktionen och den sammansatta funktionen.

Lösning: Vi definierar funktionerna $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mde ekvationerna $g(x) = \sqrt[3]{x}$ och $h(x) = x^2$. Enligt förra uppgiften gäller

$$g'(x) = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} \quad (\text{då } x \neq 0).$$

Dessutom gäller $h'(x) = 2x$.

Funktionerna g och h valdes på detta vis, eftersom f kan skrivas som en sammansatt funktion av dessa:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = g(x^2) = g(h(x)) = (g \circ h)(x).$$

Nu kan vi använda oss av kedjeregeln (Sats 5.2.11 i boken): då $x \neq 0$, så kan vi räkna

$$(g \circ h)'(x) = g'(h(x))h'(x) = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x^2})^2}2x = \frac{2x}{3x\sqrt[3]{x}}$$

alltså

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

A3. Visa att den funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som definieras av ekvationen $f(x) = x + x^3 + x^5$ har en invers funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, som är strängt växande, kontinuerlig och deriverbar. Bestäm $g'(3)$.

Lösning: Som ett polynom är f kontinuerlig och deriverbar. Dessutom gäller för alla $x \in \mathbb{R}$ att

$$f'(x) = 1 + 3x^2 + 5x^4 \geq 1 > 0,$$

så därmed är f strängt växande (Sats 5.3.11). En kontinuerlig och strängt växande funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ har en invers funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Sats 4.2.4), och eftersom f är överallt deriverbar och $f'(x) \neq 0$, så är även g överallt deriverbar (Sats 5.2.13), och dess derivata fås av ekvationen

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Vi vill ta reda på $g'(3)$, så vi kollar först för vilket x gäller $f(x) = 3$. Genom att prova märker vi att $f(1) = 3$, så vi kan räkna

$$g'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{1+3+5} = \frac{1}{9}.$$

A4. Betrakta den funktion som definieras av ekvationen $f(x) = x^3$ i intervallet $[0,1]$. Verifiera att man kan tillämpa medelvärdessatsen. Bestäm punkten ξ (dvs. någon av punkterna) som medelvärdessatsen ger.

Kan man av resultatet dra slutsatsen att man nödvändigtvis behöver veta i beviset av medelvärdessatsen att mängden av reella tal är fullständig?

Lösning: Som ett polynom är f kontinuerlig i intervallet $[0,1]$ och deriverbar i intervallet $]0,1[$, så vi kan tillämpa medelvärdessatsen (Sats 5.3.5). Den berättar att det existerar ett $\xi \in]0,1[$, för vilket

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1$$

Vi löser till nästa vad talet ξ borde vara. Ekvationen

$$f'(x) = 3x^2 = 1$$

har lösningarna $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ och $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, av vilka endast den första lösningen är i intervallet $]0,1[$. Punkten vi får med medelvärdessatsen är alltså $\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Från resultatet kan vi konstatera att i medelvärdessatsens bevis krävs definitivt fullständigheten av de reella talen. Talet $\frac{1}{\sqrt{3}}$ är ju inte ett rationellt tal, så uppgiften visar att medelvärdessatsen inte gäller inom mängden av de rationella talen. De rationella talen uppfyller samma axiom som de reella talen, förutom **fullständighetsaxiomet**. Alltså krävs fullständighetsaxiomet i beviset av medelvärdessatsen. (I bokens bevis används Rolles sats, som använder sig av Weierstrass min-max-sats, där fullständighetsaxiomet används för att välja *supremumet*. Fullständighetsaxiomet är alltså väl gömt!)