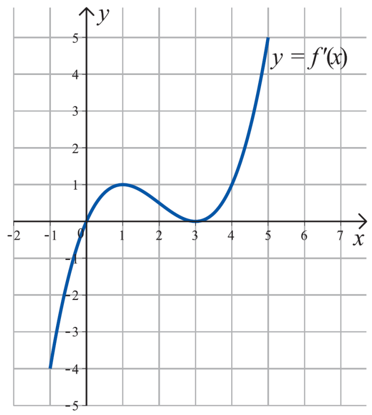
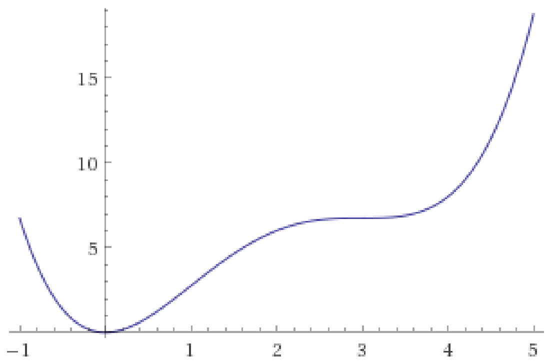
HU / Institutionen för matematik och statistik
Differentialkalkyl, hösten 2016
Övning 4 – Modellösningar

L1. Skissera grafen av någon funktion, för vilken grafen av derivatafunktionen kunde se ut som på bilden i uppgift A1. (En skissartad lösning räcker.)

Lösning: Vi tar och skissar en integralfunktion f för funktionen f'. Hur har vi



Kuva 1: Ursprungliga bilden.



Kuva 2: Skiss.

kommit fram till detta?

- Värden av derivatadunktionen f' är negativa i intervallet $[-1, 0)$, så därmed är f avtagande i detta intervall.
- I punkten $x = 0$ har f' en nollpunkt och dessutom rör den sig över x-axeln, så avbildningen av f ändras från avtagande till växande.
- Inom intervallet $(0, 1)$ är f' positivt, så därmed är f växande. Även dess avbildning blir brantare, eftersom f' växer.
- Vid punkten $x = 1$ ändrar avbildningen av f' riktning från växande till avtagande. Detta betyder att avbildningen f inte hålls lika brant och växer istället mindre och mindre.
- Inom intervallet är $(1, 3)$ f' positivt, så därmed är f växande. Avbildningens brant minskar dock, eftersom f' är avtagande.

- Vid punkten $x = 3$ har f' err nollställe, men dess avbildning skär inte x-axeln, utan hålls hela tiden positiv. Riktningen av avbildningen av f byter alltså inte, utan avbildningen av f har vid denna punkt en "plattform".
- Inom intervallet $(3, 5]$ är f' positivt, så därmed är f växande. Även avbildningen blir brantare, eftersom f' växer.

L2. Anta att funktionen f är definierad åtminstone i något intervall $]x_0 - r, x_0 + r[$ förutom eventuellt i punkten x_0. Visa att följande villkor är ekvivalenta:

(a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$, och

(b) $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = a$.

Lösning:

Vi visar först att (a) $\Rightarrow$ (b): Låt $\epsilon > 0$. (a) $\Rightarrow$ Det finns ett sådant $\delta > 0$, att $|f(x) - a| < \epsilon$, då $0 < |x - x_0| < \delta$.

Om vi betecknar $h := x - x_0$[1] (alltså $x = x_0 + h$,) så det tidigare resultatet kan skrivas i formen: Det finns ett sådant $\delta > 0$, att $|f(x_0 + h) - a| < \epsilon$, då $0 < |h| < \delta$. Detta är definitionen för gränsvärdet $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = a$.

Vi visar till näst att (b) $\Rightarrow$ (a): Låt $\epsilon > 0$. (b) $\Rightarrow$ Det finns ett sådant $\delta > 0$, att $|f(x_0 + h) - a| < \epsilon$, då $0 < |h| < \delta$.

Om vi betecknar $x := x_0 + h$, (alltså $h = x - x_0$,) så kan det tidigare resultatet skrivas i formen: Det finns ett sådant $\delta > 0$, att $|f(x) - a| < \epsilon$, då $0 < |x - x_0| < \delta$. Detta är definitionen för gränsvärdet $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$.

L3. Anta att funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig. Anta dessutom att $f(x) \to 0$ då $x \to -\infty$ och då $x \to \infty$. Visa att det finns en punkt c, så att ett av följande alternativ gäller:

(a) För alla $x \in \mathbb{R}$ gäller att $f(x) \leq f(c)$.

(b) För alla $x \in \mathbb{R}$ gäller att $f(x) \geq f(c)$.

Lösning:

Fall 1:

$f(x) = 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Nu kan vi välja $c = 0$,och då gäller helt klart både (a) och (b).

Fall 2:

Det finns ett sådant $x_0 \in \mathbb{R}$, att $f(x_0) > 0$. Eftersom $f(x) \to 0$ då $x \to -\infty$, så finns det en sådan tröskel K', att $f(x) < f(x_0)$ då $x < K'$.

Å andra sidan, eftersom $f(x) \to 0$ då $x \to \infty$, så finns det en sådan tröskel K'', att $f(x) < f(x_0)$ då $x > K''$.

Inom det slutna intervalet $[K', K'']$ kan vi använda Weierstrass min-max-sats (4.3.3 i boken): det finns ett sådant $c \in [K', K'']$, att $f(x) \leq f(c)$ för alla $x \in [K', K'']$. Om det istället gäller $x \in (-\infty, K') \cup (K'', \infty)$, så $f(x) \leq f(x_0) \leq f(c)$. I båda fallen märker vi att (a) gäller.

Fall 3:

Det finns ett sådant $x_0 \in \mathbb{R}$, att $f(x_0) < 0$. Eftersom $f(x) \to 0$ då $x \to -\infty$, så finns det en sådan tröskel K', att $f(x) > f(x_0)$ då $x < K'$.

[1] Kolon framför likamedtecken betyder att något definieras: vi tar nu alltså i bruk den nya variabeln h och *definierar* att den betyder talet $x - x_0$. Beteckningen används ofta i litteratur och under senare kurser.

Å andra sidan, eftersom $f(x) \to 0$ då $x \to \infty$, så finns det en sådan tröskel K'', att $f(x) > f(x_0)$ då $x > K''$.

Inom det slutna intervalet $[K', K'']$ kan vi använda Weierstrass min-max-sats (4.3.3 i boken): det finns ett sådant $c \in [K', K'']$, att $f(x) \geq f(c)$ för alla $x \in [K', K'']$. Om det istället fäller $x \in (-\infty, K') \cup (K'', \infty)$, så $f(x) \geq f(x_0) \geq f(c)$. I båda fallen märker vi att (b) gäller.

L4. Anta att $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig samt att för alla $x \in [0,1]$ gäller att $0 \leq f(x) \leq 1$. Visa att det finns en punkt $x \in [0,1]$ för vilken gäller att $f(x) = x$. *Tips:* Hjälpfunktionen $F(x) = x - f(x)$ är användbar.

Lösning: Vi märker att

$$f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - x = 0$$

Vi följer därmed tipset och definierar vår hjälpfunktion $g(x) := f(x) - x$. Eftersom värdemängden för funktionen f tillhör intervallet $[0,1]$, så gäller $g(0) \in [0,1]$ och $g(1) \in [-1,0]$.

Till näst vill vi använda Bolzanos sats på funktionen g inom intervallet $[0,1]$. För det skulle vi behöva ännu veta om $g(0) > 0$ och $g(1) < 0$ (strikta olikheter!).

Men vi märker att om $g(0) = 0$ eller $g(1) = 0$, så gäller detta helt klart: det sökta värdet hittas i den andra ändpunkten av intervallet $[0,1]$. Vi kan låta bli att betrakta dessa triviala fall.

Vi kan alltså anta att $g(0) \in (0,1]$ och $g(1) \in [-1,0)$. Nu gäller enligt Bolzanos sats att det finns ett sådant $c \in (0,1)$ att $g(c) = 0$.

Genom att slå ihop dessa kunskaper, så får vi att det ivarjefall existerar ett sådant $c \in [0,1]$, att $f(c) = c$.

L5. Härled deriveringsregeln för funktionen $f(x) = x^4$ direkt från differentialuttrycket i 5.2.9 och 5.2.10 från [HKK] samt ekvationen

$$(x+h)^4 = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$$

utan att använda differenskvoten. *Tips:* Identifiera delarna av differentialuttrycket från ovanstående formel.

Lösning: Differentialuttrycket för funktionen f i punkten $x \in \mathbb{R}$ betyder uttrycket

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + hu(h),$$

där $u(h)$ är en felmarginalsterm som uppkommer inom lineär approximation, kopplat till punkte x.

Uppgiftens ekvationen påminner mycket om uttrycket. Vi skulle vilja konstaterar att den faktiskt duger som ett differentialuttryck och sedan använda lemmat 5.2.10.[2]

Vi omformulerar uttrycket en aning:

$$\begin{aligned}(x+h)^4 &= x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 \\ &= x^4 + 4x^3h + h(6x^2h + 4xh^2 + h^3)\end{aligned}$$

Vi märker att den sista delen

$$6x^2h + 4xh^2 + h^3 \to 0 \quad \text{då} \quad h \to 0$$

Alltså duger uppgiftens ekvation som ett differentialuttryck. Nu gäller enligt lemmat 5.2.10 att f är deriverbar över alla $x \in \mathbb{R}$ och att $f'(x) = 4x^3$.

[2] Jämför detta med tredje uppgiften från början av veckan!

L6. Betrakta den funktion som definieras av ekvationen $f(x) = x^2$. Anta att $x \in \mathbb{R}$. Bestäm uttrycket $\alpha(h)$, så att för alla $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gäller att

$$(x + h)^2 = x^2 + 5xh + h\alpha(h).$$

Varför utgör detta resultat inte en motsägelse med 5.2.9 och 5.2.10 i [HKK]?

Lösning: Enligt binomialformeln som är bekant från gymnasiet, gäller

$$(x + h)^2 = x^2 + 2xh + h^2 = x^2 + 5xh - 3xh + h^2 = x^2 + 5xh + h(h - 3x),$$

alltså duger som funktion α (kopplat till punkten x) ekvationen

$$\alpha(h) = h - 3x$$

Vi märker att resultatet påminner mycket om differentialuttrycket, men $5x$ är inter derivatan av funktionen $f(x) = x^2$. Problemet är termen $\alpha(h)$, för vilken

$$\alpha(h) = h - 3x \to -3x \quad \text{då} \quad h \to 0.$$

Framförallt märker vi att $-3x \neq 0$ om $x \neq 0$, alltså duger uttrycket inte som differentialuttrycket för funktionen f (förutom i punkten $x = 0$).