HU / Institutionen för matematik och statistik
Differentialkalkyl, hösten 2016
Övning 4 – Modellösningar

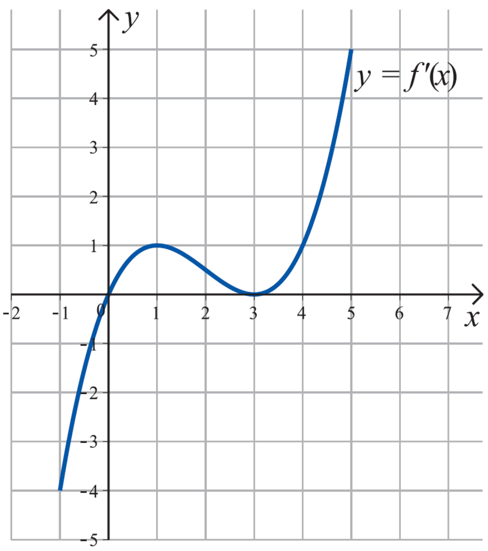
A1. Lös uppgift 4 från den långa matematikens studentprov våren 2016. Denna uppgift med tillhörande bild finns exempelvis på sidan

http://yle.fi/aihe/artikkeli/2016/02/24/kevat-2016-matematiikka-pitka-oppimaara

Du får använda de kunskaper om derivatan som är kända från skolan.

Lösning: Uppgiften i fråga var följande.
I figuren nedan visas grafen av derivatafunktionen $f'(x)$ till en viss funktion $f(x)$ i intervallet $-1 < x < 5$.

a) Bestäm utgående från grafen nollställena till derivatafunktionen $f'(x)$.
b) Bestäm utgående från grafen de intervall där funktionen $f(x)$ är växande.
c) Bestäm utgående från grafen de lokala extremställena till funktionen $f(x)$ och vilka typer av extremställen det är frågan om.



a) Derivatafunktionens nollställen är vid de punkter, där $f'(x) = 0$. Punkter som dessa är $x = 0$ och $x = 3$.

b) Funktionen f är växande i de intervallen där det för derivatafunktionen gäller $f'(x) \geq 0$. Från figuren hittas ett sådant intervall $[0, 5[$.

c) Derivatafunktionen f' är negativ före punkten $x = 0$, alltså är funktionen f då avtagande. Efter punkten $x = 0$är derivatafunktionen f' positiv, och därmed är f växande. Således finns ett extremställe vid punkten $x = 0$ och det är ett minimi.

A2. Visa att funktionen f är kontinuerlig i det slutna intervallet $[a, b]$ om och endast om för alla $\varepsilon > 0$ och alla $x \in [a, b]$ finns ett $\delta > 0$, så att för alla $t \in [a, b]$ gäller: om $|x - t| < \delta$, så är $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$.

Lösning:

Vi löser uppgiften i två delar.
$\Rightarrow$ Vi antar till först att funktionen f är kontinuerlig i det slutna intervallet $[a, b]$

och vi visar att för alla $\varepsilon > 0$ och alla $x \in [a, b]$ finns det ett $\delta > 0$, så att för alla $t \in [a, b]$ gäller: om $|x - t| < \delta$, så är $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$.

(1) Vi antar att $x \in (a, b)$. Nu finns ett sådant $r > 0$, exempelvis $r = \min((x - a)/2, (b - x)/2)$ så att $(-r + x, x + r) \in [a, b]$. Således är funktionen f kontinuerlig i punkten x. Nu gäller enligt kontinuitetens definition att för alla $\varepsilon > 0$ hittas ett $\delta > 0$, så att $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ då $|t - x| < \delta$. Särskilt gäller påståendet då för alla $t \in [a, b]$.

(2) Vi antar att $x = a$. Nu finns ett sådant $r > 0$, exempelvis $r = (b - x)/2$ så att $[x, x + r) \in [a, b]$. Således är funktionen f högerkontinuerlig vid punkten x. Nu gäller enligt kontinuitetens definition att för alla $\varepsilon > 0$ hittas ett $\delta > 0$, så att $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ då $x \leq t < x + \delta$, och särskilt gäller påståendet för alla $t \in [a, b]$.

(3) Vi antar att $x = b$. Nu finns ett sådant $r > 0$, exempelvis $r = (x - a)/2$ så att $(x - r, x] \in [a, b]$. Således är funktionen f vänsterkontinuerlig vid punkten x. Nu gäller enligt kontinuitetens definition att för alla $\varepsilon > 0$ hittas ett $\delta > 0$, så att $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ då $x - \delta < t \leq x$. Särskilt gäller påståendet få för alla $t \in [a, b]$.

Nu är påståendet visat åt ena hållet. Vi gör till nästa beviset åt motsatt håll.

$\Leftarrow$ Vi antar att för alla $\varepsilon > 0$ och alla $x \in [a, b]$ finns ett $\delta > 0$, så att för alla $t \in [a, b]$ gäller: om $|x - t| < \delta$, så är $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$. Vi visar nu att funktionen f är kontinuerlig i det slutna intervallet $[a, b]$.

(1) Vi antar att $x \in (a, b)$. Nu finns ett sådant $r > 0$, exempelvis $r = min((x - a)/2, (b - x)/2)$ så att $(-r + x, x + r) \in [a, b]$. Nu hittas för alla $\varepsilon > 0$ ett $\delta > 0$, så att $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ då $|t - x| < \delta$. Vi kan i samband med valet av δ bestämma att $\delta \leq r$ och då följer att $|t - x| < r \Leftrightarrow -r < t - x < r \Leftrightarrow -r + x < t < x + r$, och således gäller för alla t att $t \in [a, b]$. Därmed är funktionen f kontinuerlig i alla punkter $x \in (a, b)$.

(2) Vi antar att $x = a$. Nu finns ett sådant $r > 0$, exempelvis $r = (b - x)/2$ så att $[x, x + r) \in [a, b]$. Nu hittas för alla $\varepsilon > 0$ ett $\delta > 0$, så att $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ då $x \leq t < x + \delta$. Vi kan i samband med valet av δ bestämma att $\delta \leq r$ och då följer att $x \leq t < x + \delta \leq x + r \leq b$, och således gäller för alla t att $t \in [a, b]$. Därmed är funktionen f kontinuerlig från höger i punkten $x = a$.

(3) Vi antar att $x = b$. Nu finns ett sådant $r > 0$, exempelvis $r = (x - a)/2$ så att $(x - r, x] \in [a, b]$. Nu hittas för alla $\varepsilon > 0$ ett $\delta > 0$, så att $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ då $x - \delta < t \leq x$. Vi kan i samband med valet av δ bestämma att $\delta \leq r$ och då följer att $a \leq x - r \leq x - \delta < t \leq x$, och således gäller för alla t att $t \in [a, b]$. Därmed är funktionen f kontinuerlig från vänster i punkten $x = b$.

Nu är påståendet bevisat från båda hållen.

A3. Bekanta dig med det differentialuttryck som behandlas i punkterna 5.2.9 och 5.2.10 i [HKK]. Sök deriveringsregeln för funktionen $f(x) = x^3$ på basen av ovanstående resultat direkt från ekvationen

$$(x + h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$

utan att använda differenskvoten. *Tips:* Identifiera delarna till differentialuttrycket från ovanstående formel.

Lösning: Vi antar att x är någon konstant. Vi börjar med att betrakta uttrycket $3xh^2 + h^3$ och bryter ut h.

$$3xh^2 + h^3 = h(3xh + h^2)$$

Vi betecknar $u(h) = 3xh + h^2$. Nu gäller

$$\lim_{h\to 0} u(h) = \lim_{h\to 0} 3xh + h^2 = 0 = u(0).$$

Vi får alltså differentialuttrycket för funktionen f i formen

$$f(x+h) = (x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 = f(x) + 3x^2h + hu(h).$$

Enligt ovanstående deduktion är f deriverbar i alla dess punkter och derivatans värde fås från den sista ekvationen, alltså $f'(x) = 3x^2$.

A4. Bekanta dig med definitionen av *likformig kontinuitet* från punkt 4.4.1 i [HKK], och visa att den funktion $f\colon]0,1[\to \mathbb{R}$ som definieras av ekvationen $f(x) = \frac{1}{x}$ inte är likformigt kontinuerlig.

Vilken är skillnaden mellan definitionen av likformig kontinuitet och villkoret från uppgift 4:A2? (Likformig kontinuitet diskuteras inte mera under höstens kurs. Detta begrepp är dock till och med viktigare än kontinuitet, och det fundamentala resultatet Sats 4.4.5 från [HKK] behövs på vårens kurs exempelvis för att visa att (Riemann-)integralen är definierad för varje kontinuerlig funktion.)

Lösning: Funktionen är inte likformigt kontinuerlig i intervallet $]0,1[$, om det finns ett $\varepsilon > 0$, så det för alla $\delta > 0$ hittas $x, y \in]0,1[$ så att $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$, då $|x - y| < \delta$.

Sätt 1

Genom att välja x och y, som är av formen $x = 1/n$ och $y = 1/(n+1)$ märker vi att vi får avståndet mellan x och y att vara hur litet som helst och ändå få avståndet mellan $f(x)$ och $f(y)$ att hållas konstant 1. Det lönar sig att rita en bild!

Vi betraktar avståndet

$$|x-y| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| = \left|\frac{n+1-n}{n^2+n}\right| = \frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n}.$$

Vi märker ekvivalensen

$$\frac{1}{n} < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{\delta} < n.$$

Nu kan vi formulera beviset.

Välj $\varepsilon = 1$ och anta att $\delta > 0$. Nu hittas ett sådant $n \in \mathbb{N}$, att $n > \frac{1}{\delta}$. Välj till näst $x = 1/n$ och $y = 1/(n+1)$, vilket ger att

$$|x-y| \leq \frac{1}{n} < \delta.$$

Dock ser vi nu att

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{1}{\frac{1}{n}} - \frac{1}{\frac{1}{n+1}}\right| = |n - (n+1)| = 1 = \varepsilon.$$

Alltså är funktionen f inte likformigt kontinuerlig.

Sätt 2
Vi antar att $x < y$ och börjar uppskatta uttrycket.

$$|f(x) - f(y)| = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) = \left(\frac{y - x}{xy}\right) = \frac{y - x}{xy}.$$

Nu om vi väljer $x = \delta/2$ och $y = \delta$ får vi att

$$\frac{y - x}{xy} = \frac{\delta - \delta/2}{(\delta/2)\delta} = \frac{\delta/2}{\delta^2/2} = \frac{1}{\delta}.$$

Vi kan också anta att $\delta < 1$, eftersom om påståendet inte gäller då $|x - y| < 1$ så gäller det inte heller för något större δ. Således får vi att $\frac{1}{\delta} > \frac{1}{1} = 1$.

Nu kan vi formulera beviset.

Välj $\varepsilon = 1$ och anta att $\delta > 0$. Välj sedan $x = \delta/2$ och $y = \delta$. Nu gäller

$$|f(x) - f(y)| = \frac{1}{\delta} > 1 = \varepsilon,$$

då $|x - y| < \delta$ och $\delta < 1$. Således gäller påståendet även då när $\delta \geq 1$ och påståendet är bevisat.