HU / Institutionen för matematik och statistik
Differentialkalkyl, hösten 2016
Övning 3 – Modellösningar

L1. Lös ekvationen $x^7 + x^3 = 1$ med tre decimalers noggrannhet med hjälp av "gaffelmetoden".

Lösning: Vi definierar funktionen f med ekvationen $f(x) = x^7 + x^3 - 1$. Nu vill vi lösa nollställena för denna funktion f.

"Gaffelmetodens"idé kan lätt kopplas till *Bolzanos sats* (4.2.1), som säger att om en kontinuerlig funktion får positiva värden vid ena ändpunkten av ett slutet intervall och negativa i den andra ändpunkten, så får den vid någon punkt inom intervallet värdet 0. Med gaffelmetoden delar vi intervallet i mindre och mindre delar, så att funktionen fortfarande får positiva värden i ena ändpunkten och negativa i den andra.

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 \\ f(0.5) &= -0.867... \end{aligned}$$

Nu vet vi att funktionen måste ha ett nollställe inom intervallet $]0.5; 1[$, så vi tar och räknar ut ett nytt värde från detta intervall. Det lönar sig vanligtvis att välja punkten ungefär från mitten av intervallet: vi väljer exempelvis punkten 0.8.

$$\begin{aligned} f(0.8) &= -0.278... && \text{nollstället mellan }]0.8; 1[\\ f(0.9) &= 0.207... &&]0.8; 0.9[\\ f(0.85) &= -0.0652... &&]0.85; 0.9[\\ f(0.87) &= 0.0357... &&]0.85; 0.87[\\ f(0.86) &= -0.0160... &&]0.86; 0.87[\\ f(0.865) &= 0.00955... &&]0.86; 0.865[\\ f(0.863) &= -0.000751... &&]0.863; 0.865[\\ f(0.864) &= 0.00438... &&]0.863; 0.864[\\ f(0.8635) &= 0.00181... \end{aligned}$$

Nu vet vi alltså att $f(0.863) < 0$ och $f(0.8635) > 0$. Dessutom är funktionen f kontinuerlig inom intervallet $[0.863; 0.8635]$. Enligt Bolzanos sats existerar nu $x \in (0.863; 0.8635)$, för vilket $f(x) = 0$. Vi vet inte det exakta värdet av x, men vi vet att dess fjärde decimal är högst 4, och därmed är den tredje decimalens närmevärde $x \approx 0.863$.

Obs. Lösningen ovan är inte helt uttömmande, eftersom vi inte visat att funktionen f endast har ett nollställe. Detta lyckas dock lätt med metoder som kommer emot senare under kursen, så vi hoppar över det beviset tillsvidare.

L2. Betrakta funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som satisfierar egenskaperna $f(0) = 0$ och

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Anta dessutom att funktionen f är kontinuerlig i varje punkt $x \neq 0$. Visa att funktionen f antar alla reella värden. (Jämför resultatet med uppgift 3:A1.)

Lösning: Låt $y \in \mathbb{R}$ vara vilket som helst reellt tal. Vi undersöker skiljt fallen $y = 0$, $y > 0$ och $y < 0$.

$\boxed{\text{Fallet } y = 0\text{:}}$ vi vet att $f(0) = 0 = y$, så f får värdet y.

$\boxed{\text{Fallet } y > 0\text{:}}$

Tankar inför beviset: Vi kan inte direkt börja söka någon punkt där f skulle få värdet y. Dock, med hjälp av det vi vet om gränsvärdena, så kan vi söka punkterna a och b, där f får ett större värde än y, samt ett mindre värde än y. Med hjälp av kontinuiteten kan vi nu använda oss av Bolzanos sats (eller Bolzanos korollarie): en kontinuerlig funktion f på intervallet $[a, b]$ får alla värden mellan talen $f(a)$ och $f(b)$, i detta fall särskilt y.

Bevis: Vi letar till först en punkt a, där $f(a) > y$. Vi vet att

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty.$$

Enligt definitionen betyder detta att för alla $M \in \mathbb{R}$ existerar ett $\delta > 0$, för vilket

$$f(x) > M, \text{ då } 0 < x < \delta.$$

Genom att välja $M = y$ får vi alltså följande kunskap: det existerar ett $\delta > 0$, för vilket

$$f(x) > y, \text{ då } 0 < x < \delta.$$

Vi hittade alltså ett helt intervall punkter $]0, \delta[$, där f får större värden än y. För oss räcker det ändå med en punkt, så vi väljer exempelvis $a = \delta/2$. (Märk att det gäller att $a > 0$.)

Vi letar en punkt b, där $f(b) < y$. Vi vet att

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0.$$

Enligt definitionen betyder detta att för alla $\epsilon > 0$ existerar en tröskel $K \in \mathbb{R}$, för vilken

$$|f(x) - 0| < \epsilon, \text{ då } x > K.$$

Genom att välja $\epsilon = y$ får vi alltså följande kunskap: det existerar en tröskel $K \in \mathbb{R}$, för vilken

$$f(x) \leq |f(x)| < y, \text{ då } x > K.$$

Vi hittade alltså ett intervall $]K, \infty[$, där f får mindre värden än y. Än en gång räcker det med en punkt, så vi väljer exempelvis $b = K + 1$. Märk att $b > a$. Annars skulle det gälla $a \geq b > K$, vilket enligt tidigare skulle leda till $f(a) < y$, vilket är en motsägelse.)

Nu gäller $f(a) > y$ och $f(b) < y$. Dessutom $0 < a < b$, så 0 tillhör inte intervallet $[a, b]$. Alltså är funktionen f kontinuerlig i intervallet $[a, b]$, och enligt Bolzanos korollarie (4.3.2) får f varje värde som finns mellan talen $f(a)$ och $f(b)$. Särskilt får f alltså värdet y.

$\boxed{\text{Fallet } y < 0\text{:}}$ Fallet bevisas på motsvarande vis som fallet $y > 0$, men istället med hjälp av de två andra gränsvärden i uppgiften. (Det lönar sig definitivt att också gå igenom detta fall noggrannt för sig själv, övning ger färdighet!)

Vi har visat att funktionen f kan få som värde talet y, oberoende av vilket reellt tal y är. Alltså får f alla reella värden. $\square$

L3. Anta att funktionen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig och att för alla x gäller att $0 \leq g(x) \leq 3$. Definiera funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med ekvationen

$$f(x) = \frac{g(x)}{x^2+1}.$$

Visa att det finns ett största värde bland de värden som funktionen f antar.

Lösning: Vi konstaterar till först att funktionen f är kontinuerlig, eftersom g är kontinuerlig och x^2+1 är kontinuerlig och överallt $\neq 0$.

Tankar inför beviset: Vi skulle vilja använda *Weierstrass min-max-sats* (4.3.3), som säger att i en mängd värden en kontinuerlig funktion får i ett slutet intervall, så finns det ett största värde. Problemet är att f är definierat för hela $\mathbb{R}$, som inte är ett slutet intervall. Därför måste vi hitta på något trick så vi kan istället betrakta ett slutet intervall.

För tricket märker vi att funktionen $1/(x^2+1)$ närmar sig noll oberoende av vilken oändlighet vi närmar oss bland de reella värden. Multiplicering med en begränsad funktion ändrar inte på detta, så också f närmar sig noll då vi går mot oändlighet. Intuitivt kan vi tänka att f antar väldigt så små värden tillräckligt långt borta från origo, att det största värdet inte kan hittas åtminstone därifrån, vilket betyder att vi kan begränsa oss till att betrakta något intervall i närheten av origo – exempelvis något slutet intervall $[a, b]$. Då kunde vi använda Weierstrass min-max-sats. Med dessa kunskaper i hand tar vi och formar beviset!

Bevis: Om f är nollfunktionen $f(x) = 0$, finns det bland alla värden av f endast ett och därmed det största värdet, 0.

Vi antar nu att $f(x)$ inte är 0 överallt. Det hittas alltså något $x_0 \in \mathbb{R}$, så att $f(x_0) > 0$. Vi använder denna konstant $f(x_0)$ som ett värde att jämföra med då vi vill visa $f(x)$ vara "otroligt litet"i den reella talaxelns ändor: vi visar att det existerar en tröskel $K \in \mathbb{R}$, för vilken $f(x) < f(x_0)$, då $|x| > K$. För att underlätta uppskattningen, så kräver vi att $|x| > 1$: då gäller $x^2 = |x^2| = |x||x| > |x|$. Vi uppskattar uttrycket:

$$f(x) = \frac{g(x)}{x^2+1} \leq \frac{3}{x^2} \leq \frac{3}{|x|}.$$

Vi märker följande ekvivalens:

$$\frac{3}{|x|} < f(x_0) \iff |x| > \frac{3}{f(x_0)}.$$

Nu kan vi välja som tröskel $K = \max\{1, 3/f(x_0)\}$. Då $|x| > K$, gäller att

$$f(x) \leq \frac{3}{|x|} < \frac{3}{K} \leq \frac{3}{\frac{3}{f(x_0)}} = f(x_0).$$

Vi är nästan färdiga! Vi har visat att f får utanför ett slutet intervall $[-K, K]$ endast värden som är mindre än ett visst värde, $f(x_0)$.

Nu kan vi använda Weierstrass min-max-sats: bland värdena som f antar i det slutna intervallet $[-K, K]$ finns ett största värde $y \in \mathbb{R}$. Då $|x| \leq K$, gäller alltså $f(x) \leq y$; då det för $|x| > K$, gäller att $f(x) < f(x_0) \leq y$. Alltså gäller det för alla $x \in \mathbb{R}$ att $f(x) \leq y$, så därmed är y det största av värdena som f antar. $\square$

Obs. (1) man kan visa att $f(x)$ är litet på flera olika sätt. Kravet $f(x) < f(x_0)$, då $|x| > K$, betyder att funktionen antar mindre värden än vårt jämförelsevärde $f(x_0)$, då $x > K$ eller $x < -K$, alltså undersöker vi båda ändorna av reella axeln samtidigt. Dessa kan naturligtvis också betraktas skiljt för sig. Ett annat fungerande sätt är att först visa att

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \text{ och } \lim_{x\to\infty} f(x) = 0,$$

och välja med dess kunskaper trösklarna K_1 och K_2, för vilka $f(x) < f(x_0)$, då $x < K_1$ eller $x > K_2$.

(2) Uppgiftens påstående kan kännas som en självklarhet: förstås får funktionen ett största värde! Vi tar och visar att detta inte alltid gäller. Låt $g : [0,1[\to \mathbb{R}$, $g(x) = x$. Denna funktion får inte ett största värde (i sin definitionsmängd), eftersom dess värdemängd är intervallet $[0,1[$, som inte har ett största värde. (Däremot har den nog ett supremum, vilket?)

L4. (Fortsättning på uppgift 3:A6) Visa att derivatan av funktionen $\sin(x)$ är $\cos(x)$. *Tips:* undersök sidorna 87-88 i kompendiet [HS]. (Härledningen i [HS] innehåller ett par mindre brister. Kan du finna dessa?)

Lösning: Beviset hittas under sats 9.27 på sidan 88 i [HS]. (Vi upprepar inte hela beviset här.) I beviset använder man sig av sinusfunktionens summaformel (axiom (4) på sidan 86), gränsvädet $\sin x/x \to 1$, då $x \to 0$ (axiom (5) på sidan 86), samt följande kunskap:

$$\frac{\cos h - 1}{h} \to 0, \text{ då } h \to 0.$$

I materialet sägs det inte helt direkt vad detta beror på, så vi motiverar det här. vi vet att

$$-h \to 0, \text{ då } h \to 0.$$

Enligt förra satsen 9.26 (sidorna 87-88, gå igenom beviset på egen hand!) gäller:

$$\frac{1 - \cos h}{h^2} \to \frac{1}{2}, \text{ då } h \to 0.$$

Från dessa två kunskaper följer från den egna kursbokens sats 3.1.11, att

$$\frac{\cos h - 1}{h} = -h\frac{1 - \cos h}{h^2} \to 0 \cdot \frac{1}{2}, \text{ då } h \to 0.$$

Ett av bristerna som nämns i uppgiftsgivningen är att det i beviset skrivits såhär:

$$''D \sin x = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}\ ''$$

Derivatan är dock inte ett differensbråk, utan dess gränsvärde, så därmed skulle man inte få skriva såhär.