HU / Institutionen för matematik och statistik
Differentialkalkyl, hösten 2016
Övning 3 – Modellösningar

A1. Betrakta funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, som är definierad av villkoren $f(x) = \frac{1}{x}$ då $x \neq 0$ och $f(0) = 0$. Visa att f antar alla reella värden.

Lösning: Helt klart antar funktionen värdet noll, så det räcker med att undersöka alla värden $y \neq 0$:

Låt $y \neq 0$. Nu gäller

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y.$$

Alltså antar funktionen f alla reella värden.

A2. Lös ekvationen $\sin x = \frac{1}{2}$.

Lösning: En enskild lösning för ekvationen är $x = \dfrac{\pi}{6}$. Lösningen hittar man exempelvis från en likbent rätvinklig triangels trigonometri. Rita bild!

Alla lösningar fås från enhetscirkeln. Rita bild!

Ekvationens lösning är alltså $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$ eller $x = \pi - \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n$, där $n \in \mathbb{Z}$.

A3. Anta att $A \subset \mathbb{R}$ och $f\colon A \to \mathbb{R}$. Låt

$$m = \sup\{f(x) \mid x \in A\}.$$

Vi antar dessutom att för alla $x \in A$ gäller att $f(x) < m$. Visa att den funktion g som definieras av uttrycket

$$g(x) = \frac{1}{m - f(x)}$$

inte är uppåt begränsad i mängden A.

Lösning:

Tankar inför beviset:

Man ska alltså visa att mängden $\{g(x) \mid x \in A\}$ inte är uppifrån begränsad. Detta betyder att det för alla $M > 0$ finns ett $x \in A$, så att $g(x) > M$.

Vi vet att $m = \sup\{f(x) \mid x \in A\}$. Då gäller för varje $\varepsilon > 0$ att det finns ett $x \in A$, så att $f(x) > m - \varepsilon$ alltså $m - f(x) < \varepsilon$.

Eftersom $m > f(x)$, så $m - f(x) > 0$ och vi kan uppskatta uttrycket

$$g(x) = \frac{1}{m - f(x)} > \frac{1}{\varepsilon}$$

Vi märker ekvivalensen:

$$\frac{1}{\varepsilon} = M \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{1}{M}$$

Bevis:

Låt $M > 0$.

Nu finns ett $x \in A$, så att $m - f(x) < \frac{1}{M}$. För detta x gäller:

$$g(x) = \frac{1}{m - f(x)} > \frac{1}{\frac{1}{M}} = M$$

Alltså är mängden $\{g(x) \mid x \in A\}$ inte uppifrån begränsad.

A4. Anta att den växande funktionen f är definierad åtminstone då $x \in \,]a, b[$. Anta att $x_0 \in \,]a, b[$.

(a) Visa att de ensidiga gränsvärden $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ och $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ existerar.

(b) Visa att $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$.

Tips: Undersök Sats 3.3.4 (sida 68) i boken [HKK].

Lösning:

(a) i. Vi visar först att $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ existerar:

Vi undersöker mängden $A = \{f(x) \mid x < x_0\}$. Eftersom funktionen f är växande, så är $f(x_0)$ en övre gräns för A. Således gäller att mängden A har en minsta övre gräns $a = \sup A$. Vi visar att $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = a$.

Bevis:
Låt $\varepsilon > 0$. Nu finns det ett $x_1 < x_0$, så att $f(x_1) > a - \varepsilon$. Välj $\delta = |x_1 - x_0|$. Nu gäller för alla $x \in (x_0 - |x_1 - x_0|, x_0)$ att $x \in (x_1, x_0)$ och eftersom f är växande, så följer det att

$$f(x) \geq f(x_1) > a - \varepsilon$$

alltså

$$a - f(x) < \varepsilon.$$

Eftersom $x < x_0$, så $f(x) \leq a$ och därmed $f(x) - a \leq 0$. Alltså gäller

$$|f(x) - a| = a - f(x) < \varepsilon.$$

Således gäller att $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = a$.

ii. Till näst visar vi att $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ existerar. Detta görs på motsvarande vis:

Vi undersöker mängden $B = \{f(x) \mid x > x_0\}$. Eftersom funktionen f är växande, så är $f(x_0)$ en undre gräns för B. Då gäller det att mängden B har en största undre gräns $b = \inf B$. Vi visar att $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = b$.

Bevis:
Låt $\varepsilon > 0$. Nu finns det ett $x_2 > x_0$, så att $f(x_2) < b + \varepsilon$. Välj $\delta = |x_2 - x_0|$. Nu gäller för alla $x \in (x_0, x_0 + |x_2 - x_0|)$ att $x \in (x_0, x_2)$ och eftersom f är växande, så följer det att

$$f(x) \leq f(x_2) < b + \varepsilon$$

alltså

$$f(x) - b < \varepsilon.$$

Eftersom $x > x_0$, så gäller $f(x) \geq b$ och därmed $f(x) - b \geq 0$. Alltså

$$|f(x) - b| = f(x) - b < \varepsilon.$$

Således gäller att $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = b$.

(b) Eftersom $f(x_0)$ är en övre gräns av A, så

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup A \leq f(x_0)$$

och motsvarligen eftersom att $f(x_0)$ är en undre gräns av mängden B, så

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \sup B \geq f(x_0)$$

därmed gäller att $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$.

A5. Kompendiet [HS] *Differential- och Integralkalkyl I.1* av Ritva Hurri Syrjänen finns länkat till hemsidan av kursen *Differentialkalkyl*. På sidan 86 ges fem axiom (basegenskaper) för funktionerna sinus och cosinus, som bildar en lista på några av de kända egenskaperna från skolan för dessa funktioner. Övriga egenskaper kan härledas från dessa axiom.

Visa på basen av dessa axiom att funktionerna $x \mapsto \sin(x)$ och $x \mapsto \cos(x)$ är kontinuerliga i punkten $x = 0$. (Beviset är skisserat på sidan 87 och detta får naturligtvis användas som utgångspunkt.)

Lösning: Vi visar till först att funktionen $\sin x$ är kontinuerlig i noll:

Tankar inför beviset:

$$|\sin x - \sin 0| = |\sin x|$$

Det finns ett $\delta_1 > 0$, så att då $0 < |x - 0| < \delta_1$, så gäller

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < 1$$

alltså

$$-1 < \frac{\sin x}{x} - 1 < 1$$

vilket ger att

$$0 < \frac{\sin x}{x} < 2$$

och därmed

$$-2 < \frac{\sin x}{x} < 2$$

som ger att

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| < 2$$

och därmed

$$|\sin x| < 2|x| = 2|x-0|.$$

Vi märker ekvivalensen:

$$2|x-0| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-0| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Bevis:

Låt $\varepsilon > 0$. Välj $\delta > 0$ så att $\delta = \min\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{2}\}$. Anta $0 < |x-0| < \delta$. Nu gäller

$$|\sin x - \sin 0| = |\sin x| < 2|x| = 2|x-0| < 2\delta \leq \varepsilon.$$

Alltså är $\sin x$ kontinuerlig i noll.

Vi visar ännu att $\cos x$ är kontinuerlig i noll:

$$\cos x = \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 1 - \sin^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}.$$

Funktionen $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$ är nu enligt satserna 4.1.15 och 4.1.12 kontinuerliga i noll.

A6. (Fortsättning på uppgift A5)

Visa att $x \mapsto \sin(x)$ och $x \mapsto \cos(x)$ är kontinuerliga i mängden av reella tal.

Lösning: Funktionen f är kontinuerlig i punkten x_0 om

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

alltså

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0), \text{ där } h = x - x_0.$$

Vi visar till först kontinuiteten av sinusfunktionen:

Låt $x_0 \in \mathbb{R}$. Nu gäller

$$\sin(x_0+h) = \sin x_0 \cos h + \sin h \cos x_0$$

Märk att x_0 bara är någon punkt där vi undersöker kontinuiteten. Den är alltså en konstant och därmed är också $\sin x_0$ och $\cos x_0$ konstanter, så därmed

$$\lim_{h\to 0} \sin x_0 = \sin x_0$$

$$\lim_{h \to 0} \cos x_0 = \cos x_0$$

och enligt förra uppgiften

$$\lim_{h \to 0} \sin h = \sin 0 = 0$$

$$\lim_{h \to 0} \cos h = \cos 0 = 1.$$

Då gäller enligt sats 3.1.11 att

$$\lim_{h \to 0} \sin(x_0 + h) = \lim_{h \to 0} (\sin x_0 \cos h + \sin h \cos x_0) = \sin x_0 \cdot 1 + 0 \cdot \cos x_0 = \sin x_0$$

Sinusfunktionen är därmed kontinuerlig i varje punkt $x_0 \in \mathbb{R}$, alltså är den kontinuerlig.

Eftersom $\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$, så är den också kontinuerlig enligt satserna 4.1.12 och 4.1.15.