HU / Institutionen för matematik och statistik
Differentialkalkyl, hösten 2016
Övning 2 – Modellösningar

L1. Anta att den överallt kontinuerliga funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ endast antar värden ≥ 0. Visa direkt på basen av definitionerna att också den funktion g som definieras av ekvationen $g(x) = \sqrt{f(x)}$ är överallt kontinuerlig.

Lösning:

Vi undersöker skiljt fallen $f(x_0) = 0$ och $f(x_0) \neq 0$, där x_0 är den betraktade punkten.

(1) Vi betraktar först fallet $f(x_0) = 0$. Nu gäller

$$\left|\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)}\right| = \left|\sqrt{f(x)}\right|.$$

Vi antar att $\varepsilon > 0$ och märker ekvivalensen

$$\left|\sqrt{f(x)}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x)| < \varepsilon^2$$

Funktionen f är kontinuerlig, så det finns ett $\delta > 0$, så att $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon^2$ då $|x - x_0| < \delta$. Nu kan vi formuler beviset. Anta att $\varepsilon > 0$ och välj $\delta > 0$ på ovan nämnda vis. Nu gäller

$$\left|\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)}\right| = \left|\sqrt{f(x)}\right| = \sqrt{|f(x) - 0|} = \sqrt{|f(x) - f(x_0)|} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon,$$

då $|x - x_0| < \delta$.

(2) Till näst betraktar vi fallet $f(x_0) \neq 0$. Vi förlänger med uttrycket $\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(x_0)}$ och får

$$\left|\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)}\right| = \frac{|f(x) - f(x_0)|}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(x_0)}} \leq \frac{|f(x) - f(x_0)|}{\sqrt{f(x_0)}}$$

Vi antar att $\varepsilon > 0$ och märker ekvivalensen

$$\frac{|f(x) - f(x_0)|}{\sqrt{f(x_0)}} < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\sqrt{f(x_0)}.$$

Funktionen f är kontinuerlig, så det finns ett $\delta > 0$, så att $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\sqrt{f(x_0)}$ då $|x - x_0| < \delta$. Nu kan vi formulera beviset. Anta att $\varepsilon > 0$ och välj $\delta > 0$ på ovan nämnda vis. Nu gäller

$$\left|\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)}\right| \leq \frac{|f(x) - f(x_0)|}{\sqrt{f(x_0)}} < \frac{\varepsilon\sqrt{f(x_0)}}{\sqrt{f(x_0)}} = \varepsilon,$$

kun $|x - x_0| < \delta$.

Eftersom resultaten nu gäller för alla funktionens punkter x_0, så är också g en kontinuerlig funktion.

L2. Anta att $r > 0$ och att den reellvärda funktionen f är definierad åtminstone då $0 < |x - x_0| < r$. Anta att $f(x) \to a$ då $x \to x_0$. Visa att det finns ett $\delta > 0$ så att för alla x gäller: om $0 < |x - x_0| < \delta$, så $|f(x)| < |a| + 1$.

Lösning:

Eftersom $f(x) \to a$ då $x \to x_0$, så vet vi att det för alla $\varepsilon > 0$ finns $k > 0$, så att $|f(x) - a| < \varepsilon$, då $0 < |x - x_0| < k$. Vi börjar nu betrakta fallen $a > 0$, $a = 0$ och $a < 0$ skiljt.

(1) Vi antar till först att $a > 0$. Då gäller även $\frac{a}{2} > 0$. Anta nu att $\varepsilon_1 \leq \frac{a}{2}$. Enligt absolutbeloppslemmat får vi även att $f(x) > 0$ på följande vis

$$|f(x) - a| < \frac{a}{2} \Leftrightarrow -\frac{a}{2} < f(x) - a < \frac{a}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{2} < f(x) < \frac{3a}{2}.$$

Vi gör ett tilläggsantagande att $\varepsilon_1 \leq 1$. Då gäller enligt absolutbeloppslemmat att

$$|f(x) - a| < 1 \Leftrightarrow -1 < f(x) - a < 1.$$

Vi fortsätter med att betrakta den högra olikheten

$$f(x) - a < 1 \Leftrightarrow f(x) < a + 1 \Leftrightarrow |f(x)| < |a| + 1.$$

Nu har vi kommit till formen vi söker efter. Den tidigare deduktionen gäller då $\varepsilon_1 = \min\{1, \frac{a}{2}\}$. Eftersom funktionen har ett gränsvärde i a, så hittar vi ett sådant δ_1, att deduktionen gäller då $0 < |x - x_0| < \delta_1$.

(2) Anta till näst att $a < 0$. Då gäller $-\frac{a}{2} > 0$. Vi kan anta $\varepsilon_2 \leq -\frac{a}{2}$. Enligt absolutbeloppslemmat gäller då även $f(x) < 0$ enligt följande

$$|f(x) - a| < -\frac{a}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{2} < f(x) - a < -\frac{a}{2} \Leftrightarrow \frac{3a}{2} < f(x) < \frac{a}{2}.$$

Vi gör ett tilläggsantagande att $\varepsilon_2 \leq 1$. Då får vi enligt absolutbeloppslemmat igen att

$$|f(x) - a| < 1 \Leftrightarrow -1 < f(x) - a < 1.$$

Genom att betrakta den vänstra olikheten ser vi att

$$-1 < f(x) - a \Leftrightarrow -f(x) + a < 1 \Leftrightarrow -f(x) < -a + 1 \Leftrightarrow |f(x)| < |a| + 1.$$

Nu har vi kommit till formen vi söker efter. Deduktionen ovan gäller då $\varepsilon_2 = \min\{1, -\frac{a}{2}\}$. Eftersom funktionen har gränsvärdet i a, så hittar vi ett sådant δ_2, att deduktionen gäller då $0 < |x - x_0| < \delta_2$.

(3) Vi antar till sist att $a = 0$ och att $\varepsilon_0 \leq 1$. Nu gäller

$$|f(x) - a| \leq 1 \Leftrightarrow |f(x)| \leq |a| + 1.$$

Vi har kommit till formen vi söker efter.Deduktionen ovan gäller då $\varepsilon_3 = 1$. Eftersom funktionen har gränsvärdet i a, så hittar vi ett sådant δ_3, att deduktionen gäller då $0 < |x - x_0| < \delta_3$.

Nu har vi visat att det går att välja ett lämpligt δ i alla fallen, och således är påståendet bevisat.

L3. Anta att $r > 0$ och att den reellvärda funktionen f är definierad åtminstone då $0 < |x - x_0| < r$. Anta att $f(x) \to a$ då $x \to x_0$, samt dessutom att $a > 0$. Visa att det finns $\delta > 0$, för vilket fäller att $f(x) > \frac{a}{2}$ för alla x som satisfierar $0 < |x - x_0| < \delta$. (Kan du formulera ett liknande resultat i fallet $a < 0$? Vad kan man säga om $a = 0$?)

Lösning:
Eftersom $f(x) \to a$ då $x \to x_0$, så vet vi att det för alla $\varepsilon > 0$ finns $\delta > 0$, så att $|f(x) - a| < \varepsilon$, då $0 < |x - x_0| < \delta$. Vi börjar nu betrakta fallen $a > 0$, $a = 0$ och $a < 0$ skiljt.

(1) Vi antar till först att $a > 0$. Då gäller även $\frac{a}{2} > 0$. Välj $\varepsilon = \frac{a}{2}$. Enligt absolutbeloppslemmat får vi att

$$|f(x) - a| < \frac{a}{2} \Leftrightarrow -\frac{a}{2} < f(x) - a < \frac{a}{2},$$

och genom att betrakta den vänstra olikheten och addera talet a ledvis får vi att

$$\frac{a}{2} < f(x).$$

Nu har vi kommit till formen vi söker efter. Deduktionen ovan gäller då $\varepsilon = \frac{a}{2}$. Eftersom funktionen har ett gränsvärde i a, så hittar vi ett sådant δ, att $|f(x) - a| < \frac{a}{2}$, då $0 < |x - x_0| < \delta$. Således gäller påståendet.

(2) Vi antar till näst att $a < 0$. Då gäller $-\frac{a}{2} > 0$. Nu skulle den motsvarande formen för det positiva fallet vara $f(x) < \frac{a}{2}$. Välj $\varepsilon = -\frac{a}{2}$. Från absolutbeloppslemmat följer

$$|f(x) - a| < -\frac{a}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{2} < f(x) - a < -\frac{a}{2},$$

och genom att betrakta den vänstra olikheten och addera talet a ledvis får vi att

$$f(x) < \frac{a}{2}.$$

Nu har vi kommit till formen vi söker efter. Deduktionen ovan gäller då $\varepsilon = -\frac{a}{2}$. Eftersom funktionen har ett gränsvärde i a, så hittar vi ett sådant δ, att $|f(x) - a| < -\frac{a}{2}$, då $0 < |x - x_0| < \delta$. Således gäller påståendet.

(3) Vi antar till sist att $a = 0$. Nu kan $f(x)$ anta positiva eller negativa värden i omgivningen av noll, så vi kan inte åstadkomma ett liknande bevis beroende av a som i fallen ovan.

L4. Anta att den reellvärda funktionen f är definierad åtminstone då $|x| < 1$ och $f(0) = 0$. Anta att

$$\frac{f(x)}{x} \to 42$$

då $x \to 0$. Visa att funktionen f är kontinuerlig i punkten $x = 0$. Tips: tillämpa resultatet från uppgift L2.

Lösning:

Genom att använda sig av resultatet från uppgift L2 får vi att det finns ett sådant $k > 0$, för vilket

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| < |42| + 1,$$

då $0 < |x - 0| < k$.
Vi börjar betrakta olikheten och märker ekvivalensen

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| < |42| + 1 \Leftrightarrow |f(x)| < 43|x|.$$

Vi betraktar nu funktionens avstånd från dess värde i punkten 0

$$|f(x) - f(0)| \leq |f(x)| + |f(0)| < 43|x| + 43|0| = 43|x|.$$

Vi märker ekvivalensen

$$43|x| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \frac{\varepsilon}{43}.$$

Bevis: Låt $\varepsilon > 0$. Välj $\delta = \min\{k, \frac{\varepsilon}{43}\}$, där k är som ovan. Nu gäller

$$|f(x) - f(0)| < 43|x| < 43\delta \leq 43\frac{\varepsilon}{43} = \varepsilon,$$

då $|x - 0| < \delta$.