INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Differentialkalkyl 2016

Modellsvar för uppgifterna i början av vecka 2:

A1 Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+1}{x^2+2}$$

med hjälp av kursens kunskaper. Du får använda faktan om gränsvärden för konstanta funktioner och funktionen $f(x) = x$. (Påminn vid behov hur dessa verifieras på basen av definitionen av gränsvärdet.) Kom också ihåg att Sats 3.1.11 i [HKK] har formen ”om ..., så ...”.

Lösning:

För den identiska funktionen $f(x) = x$ gäller:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = x_0. \tag{1}$$

För den konstanta funktionen $f(x) = a$, gäller däremot:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a. \tag{2}$$

Nu kan vi tillsammans med sats 3.1.11 bilda det betraktade uttryckets gränsvärden för täljaren och nämnaren:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 2} x &\overset{(1)}{=} 2 \\ \lim_{x\to 2} 1 &\overset{(2)}{=} 1 \end{aligned}\right\} \overset{5.1.11.}{\Rightarrow} \lim_{x\to 2} x+1 = \lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 1 = 3$$

$$\lim_{x\to 2} x \overset{(1)}{=} 2 \overset{5.1.11.}{\Rightarrow} \lim_{x\to 2} x^2 = \lim_{x\to 2} x \lim_{x\to 2} x = 4$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 2} x^2 &= 4 \\ \lim_{x\to 2} 2 &\overset{(2)}{=} 2 \end{aligned}\right\} \overset{5.1.11.}{\Rightarrow} \lim_{x\to 2} x^2+2 = \lim_{x\to 2} x^2 + \lim_{x\to 2} 2 = 6.$$

Vi vet nu att täljaren och nämnaren har gränsvärden då $x \to 2$. Dessutom är nämnarens gränsvärde inte noll, så vi kan än en gång tillämpa sats 3.1.11.:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 2} x+1 &= 3 \\ \lim_{x\to 2} x^2+2 &= 6 \end{aligned}\right\} \overset{5.1.11.}{\Rightarrow} \lim_{x\to 2} \frac{x+1}{x^2+2} = \frac{\lim_{x\to 2} x+1}{\lim_{x\to 2} x^2+2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

A2 Visa direkt på basen av definitionerna av gränsvärdet och kontinuitet att den funktion som är definierad av ekvationen $f(x) = |x|$ är kontinuerlig i hela mängden av reella tal.

Lösning:

Tankar inför beviset: Funktionen f är kontinuerlig över alla reella tal, om den är kontinuerlig i alla punkter $x_0 \in \mathbb{R}$.

Enligt definitionen för en funktions kontinuitet är funktionen f kontinuerlig i punkten x_0 om

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Enligt definitionen för en funktions gränsvärde gäller däremot:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

om det för varje $\varepsilon > 0$ hittas ett sådant $\delta > 0$, att

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ då } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Vi betraktar avståndet $|f(x) - f(x_0)|$ genom att använda oss av den vänstra sidan av triangelolikheten: $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

$$|f(x) - f(x_0)| = ||x| - |x_0|| \leq |x - x_0|.$$

Bevis: Låt $\varepsilon > 0$, välj $delta = \varepsilon$. Nu, då $0 < |x - x_0| < \delta$, så gäller:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| < \delta = \varepsilon.$$

Alltså är absolutbeloppsfunktionen kontinuerlig över hela reella axelns punkter, alltså över alla reella tal.

Obs! Ett annat sätt att lösa uppgiften skulle vara att skiljt betrakta falle $x_0 > 0, x_0 = 0$ och $x_0 < 0$. Då skulle den vänstra triangelolikheten inte behövas.

A3 Visa direkt på basen av definitionerna av gränsvärdet och kontinuitet att den funktion som är definierad av ekvationen $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ är kontinuerlig i hela mängden av reella tal.

Lösning:

Tankar inför beviset: Funktionen f on är kontinuerlig över alla reella tal om den är kontinuerlig i alla punkter $x_0 \in \mathbb{R}$.

Enligt definitionen för en funktions kontinuitet är funktionen f kontinuerlig i punkten x_0, om

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Enligt definitionen för en funktions gränsvärde däremot:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

om det för varje $\varepsilon > 0$ hittas ett sådant $\delta > 0$, att

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ då } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Vi betraktar till näst avståndet $\left|\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x_0^2+1}\right|$:

$$\left|\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x_0^2+1}\right| = \left|\frac{(x^2+1)-(x_0^2+1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x_0^2+1}}\right| = \frac{|x^2 - x_0^2|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x_0^2+1}}$$
$$= \frac{|(x-x_0)(x+x_0)|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x_0^2+1}} = \frac{|x+x_0|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x_0^2+1}}|x-x_0|$$

Vi strävar till näst efter att uppskatta termen framför avståndet $|x - x_0|$. För denna uppskattning kan vi begränsa oss till värden i närheten av punkten x_0 för variabeln x. Anta nu att

$$|x - x_0| < 1, \text{ alltså } x_0 - 1 < x < x_0 + 1.$$

Nu får vi följande uppskattning:

$$\frac{|x+x_0|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x_0^2+1}} \leq |x + x_0| \leq |x| + |x_0| \leq |x_0| + 1 + |x_0| = 2|x_0| + 1$$

Nu gäller för varje $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\left|\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x_0^2+1}\right| \leq (2|x_0|+1)|x-x_0|$$

Från detta märker vi följande ekvivalens:

$$(2|x_0|+1)|x-x_0| < \varepsilon \iff |x - x_0| \leq \frac{\varepsilon}{(2|x_0|+1)}$$

Nu kan vi formulera beviset:
Låt $\varepsilon > 0$ och $x_0 \in \mathbb{R}$. Välj $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{(2|x_0|+1)}\}$. Nu, då $0 < |x - x_0| < \varepsilon$, så gäller:

$$\left|\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x_0^2+1}\right| \leq \frac{|x^2 - x_0^2|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x_0^2+1}} \leq \frac{|x+x_0|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x_0^2+1}}|x-x_0|$$
$$\leq (2|x_0|+1)|x-x_0| < (2|x_0|+1)\delta \leq (2|x_0|+1)\frac{\varepsilon}{2|x_0|+1} = \varepsilon.$$

Vi har visat att funktionen f är kontinuerlig oberoende av punkten $x_0 \in \mathbb{R}$, alltså är funktionen kontinuerlig över alla reella tal.

A4 Anta att funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig överallt. Visa direkt på basen av definitionerna att också den funktion g som definieras av ekvaitonen $g(x) = f(x)^2$ är kontinuerlig överallt.

Tankar inför beviset: Funktionen f är kontinuerlig över alla reella tal om den är kontinuerlig i varje punkt $x_0 \in \mathbb{R}$.

Enligt definitionen för en funktions kontinuitet är funktionen f kontinuerlig i punkten x_0, om

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Enligt definitionen för en funktions gränsvärde däremot:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

om det för varje $\varepsilon > 0$ hittas ett sådant $\delta > 0$, att

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ då } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Sätt 1:

Vi betraktar till näst avståndet $|f(x)^2 - f(x_0)^2|$:

$$|f(x)^2 - f(x_0)^2| = |f(x) + f(x_0)||f(x) - f(x_0)| = (|f(x)| + |f(x_0)|)|f(x) - f(x_0)|$$

Funktionen f är kontinuerlig, så vi hittar ett sådant $\delta_1 > 0$ att

$$|f(x)| \leq |f(x_0)| + 1, \text{ då } |x - x_0| < \delta_1$$

Detta bevisas noggrannare i denna veckas uppgift L2.

Anta till näst att $|x - x_0| < \delta_1$. Nu kan vi fortsätta uppskatta avståndet:

$$\begin{aligned}(|f(x)| + |f(x_0)|)|f(x) - f(x_0)| &\leq (|f(x_0)| + 1 + |f(x_0)|)|f(x) - f(x_0)| \\ &= (2|f(x_0)| + 1)|f(x) - f(x_0)|.\end{aligned}$$

Låt $\varepsilon > 0$. Vi märker följande ekvivalens:

$$(2|f(x_0)| + 1)|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \iff |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2|f(x_0)| + 1}.$$

Vi kan än en gång hitta enligt kontinuiteten av funktionen f ett sådant $\delta_2 > 0$ att

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2|f(x_0)| + 1}, \text{ då } |x - x_0| < \delta_1$$

Vi väljer till nästa $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Nu, om $|x - x_0| < \delta$, så gäller alla våra tidigare uppskattningar och vi får att:

$$\begin{aligned}|g(x) - g(x_0)| = |f(x)^2 - f(x_0)^2| &= |f(x) + f(x_0)||f(x) - f(x_0)| \\ &\leq (|f(x)| + |f(x_0)|)|f(x) - f(x_0)| \\ &\leq (2|f(x_0)| + 1)|f(x) - f(x_0)| < (2|f(x_0)| + 1)\frac{\varepsilon}{2|f(x_0)| + 1} = \varepsilon\end{aligned}$$

För alla $x_0 \in \mathbb{R}$ hittas alltså för varje $\varepsilon > 0$ ett sådant $\delta > 0$ att $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$, då $|x - x_0| < \delta_1$. Funktionen g är alltså kontinuerlig över alla reella tal.

Sätt 2:

Vi betraktar till näst avståndet $|f(x)^2 - f(x_0)^2|$:

$$|f(x)^2 - f(x_0)^2| = |f(x) + f(x_0)||f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f(x_0) + 2f(x_0)||f(x) - f(x_0)|$$
$$\leq |f(x) - f(x_0)|^2 + |2f(x_0)||f(x) - f(x_0)|$$

Vi märker följande ekvivalens (lösning av andragradsekvationer):

$$|f(x)-f(x_0)|^2+|2f(x_0)||f(x)-f(x_0)| < \varepsilon \iff |f(x)-f(x_0)| < \sqrt{f(x_0)^2 + \varepsilon}-|f(x_0)|$$

OBS! $\sqrt{f(x_0)^2 + \varepsilon} - |f(x_0)| > 0$.

Bevis: Låt $\varepsilon > 0$ och $x_0 \in \mathbb{R}$. Eftersom funktionen f är kontinuerlig över alla reella tal, så hittas ett sådant $\delta > 0$ att

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \sqrt{f(x_0)^2 + \varepsilon} - |f(x_0)|$$

Då gäller enligt tidigare uppskattningar:

$$|f(x)^2-f(x_0)^2| = |f(x)+f(x_0)||f(x)-f(x_0)| \leq |f(x)-f(x_0)|^2+|2f(x_0)||f(x)-f(x_0)| < \varepsilon.$$

Funktionen $g(x) = f(x)^2$ är alltså kontinuerlig i varje punkt $x_0 \in \mathbb{R}$. Således är g kontinuerlig över alla reella tal.

A5 Visa att

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x+2} = 1.$$

Lösning:

$\lim_{x\to-\infty} (x+1)/(x+2) = 1$, om det för varje $\varepsilon > 0$ hittas ett sådant $m \in \mathbb{R}$, att $|(x+1)/(x+2) - 1| < \varepsilon$, då $x < m$.

Vi betraktar till näst avståndet $|(x+1)/(x+2) - 1|$:

$$\left|\frac{x+1}{x+2} - 1\right| = \left|\frac{x+1}{x+2} - \frac{x+2}{x+2}\right| = \frac{1}{|x+2|}$$

Anta att $x < -2$. Nu gäller $|x+2| = -x-2$ och vi kan fortsätta vår uppskattning till följande ekvivalens:

$$\frac{1}{|x+2|} = \frac{1}{-x-2} < \varepsilon \iff x < -2 - \frac{1}{\varepsilon}.$$

Bevis:

Låt $\varepsilon > 0$. Välj $m = -2 - \frac{1}{\varepsilon}$. Nu, om $x < m$, så gäller:

$$\left|\frac{x+1}{x+2} - 1\right| \left|\frac{x+1}{x+2} - \frac{x+2}{x+2}\right| = \frac{1}{|x+2|} = \frac{1}{-x-2} < \varepsilon.$$

Därmed gäller uppgiftens påstående.

A6 Visa att

$$\lim_{x \to 1+} \frac{x^2+2}{x-1} = \infty$$

(jämför med Definition 3.1.13 i [HKK]).

Lösning: $\lim_{x \to 1+} (x^2+2)/(x-1) = \infty$, om det för varje $M \in \mathbb{R}$ finns ett sådant $\delta > 0$ att

$$\frac{x^2+2}{x-1} > M, \text{ då } 1 < x < 1 + \delta.$$

Vi uppskattar till näst uttrycket ifråga:

$$\frac{x^2+2}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1} + \frac{3}{x-1} > \frac{3}{x-1} > \frac{1}{x-1}$$

Vi märker följande ekvivalens:

$$\frac{1}{x-1} > M \iff x < 1 + \frac{1}{M}$$

Bevis:

Låt $M \in \mathbb{R}$. Välj $\delta = \frac{1}{M}$. Nu gäller:

$$\frac{x^2+2}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1} + \frac{3}{x-1} > \frac{3}{x-1} > \frac{1}{1+\delta-1} = M.$$

Vi har nu visat att det faktiskt gäller att:

$$\lim_{x \to 1+} \frac{x^2+2}{x-1} = \infty.$$