HU / Institutionen för matematik och statistik
Differentialkalkyl, hösten 2016
Övning 1 – Modellösningar

L1. Anta att funktionen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är begränsad (dvs. det finns $M > 0$, så att det för alla $x \in \mathbb{R}$ gäller att $|g(x)| \leq M$). Definiera funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med ekvationen $f(x) = xg(x)$. Visa att funktionen f är kontinuerlig i punkten $x = 0$.

Lösning:

Tankar inför beviset: Enligt definitionen för kontinuitet är funktionen f kontinuerlig i punkten x_0 om

$$f(x) \to f(x_0), \text{ kun } x \to x_0.$$

Nu är den betraktade funktionen $f(x) = xg(x)$. Genom att använda definitionen för en funktions gränsvärde fås kontinuitetens definition till formen: för varje $\varepsilon > 0$ existerar det $\delta > 0$, för vilket

$$|xg(x) - 0g(0)| < \varepsilon,$$

då $0 < |x - 0| < \delta$. Låt oss nu alltså anta att $\varepsilon > 0$ är något tal, och så söker vi ett lämpligt $\delta > 0$, som uppfyller kravet.

Den vänstra sidan av definitionens ε-olikhet kan omformuleras på följande sätt:

$$|xg(x) - 0g(0)| = |xg(x)| = |x||g(x)| \leq |x| \cdot M.$$

Vid det sista skedet har vi använt oss av uppgiftens information: $|g(x)| \leq M$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Vi ville alltså hitta ett $\delta > 0$, med vilket det gäller för vårt nyligen funna $|x| \cdot M$ att $|x| \cdot M < \varepsilon$ då $|x - 0| < \delta$, alltså då $|x| < \delta$. Därmed kan vi välja $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Det sökta δ har alltså hittats och vi har därmed visat att gränsvärdets definition gäller. Funktionen f är alltså kontinuerlig i punkten $x = 0$, vilket är det vi ville visa.

Bevis: Låt $\varepsilon > 0$. Välj $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ och anta att $0 < |x - 0| < \delta$. Enligt tankarna ovan får vi att

$$|f(x) - f(0)| = |xg(x) - 0g(0)| \leq M|x| = M|x - 0| < M\delta = M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Därmed gäller enligt definitionen för funktionens gränsvärde att

$$f(x) \to f(0), \text{ då } x \to 0,$$

alltså är funktionen f kontinuerlig i punkten 0.

L2. (Fortsättning på uppgift L1)

(a) Ge ett exempel på en begränsad funktion g, så att funktionen f från uppgift L1 också är deriverbar i punkten $x = 0$. Motivera!

(b) Ge ett exempel på en begränsad funktion g, så att funktionen f från uppgift L1 inte är deriverbar i punkten $x = 0$. Motivera!

Lösning:

(a) Det finns flera passliga funktioner g, men den lättaste är kanske den konstanta funktionen $g(x) = 0$. Då kan vi välja exempelvis $M = 1$ så det för funktionen g gäller för alla $x \in \mathbb{R}$ att $|g(x)| = 0 \leq 1 = M$. Vi visar nu att funktionen f är deriverbar i punkten $x = 0$, då $g(x) = 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Tankar inför beviset: Enligt derivatans definition är funktionen f deriverbar i punkten x_0 och dess derivata är det reella talet A om

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to A,$$

då $x \to x_0$. Nu är den betraktade funktionen alltså $f(x) = xg(x) = x \cdot 0 = 0$ och därmed är även f en konstant funktion. Vi vet på basis av gymnasiekunskaper att en konstant funktions derivata är 0, så vi använder oss av denna information.

Genom att använda definitionen för en funktions gränsvärde får vi derivatans definition i formen: för varje $\varepsilon > 0$ existerar det $\delta > 0$, för vilket

$$\left|\frac{0 - 0}{x - 0} - 0\right| < \varepsilon,$$

då $0 < |x - 0| < \delta$. Vi antar alltså att $\varepsilon > 0$ är något tal, och söker ett lämpligt $\delta > 0$, som uppfyller kravet.

Den vänstra sidan av definitionens ε-olikhet kan nu förenklas till

$$\left|\frac{0 - 0}{x - 0} - 0\right| = 0.$$

Eftersom det antogs att $\varepsilon > 0$, så är absolutbeloppsuttrycket för alla värden av variabeln x mindre än ε och därmed kan δ väljas hur vi än vill. Vi väljer exempelvis $\delta = 1$.

Bevis: Låt $\varepsilon > 0$. Välj $\delta = 1$ och anta att $0 < |x - 0| < \delta$. Enligt tankar ovan får vi att

$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - 0\right| = \left|\frac{0 - 0}{x - 0} - 0\right| = 0 < \varepsilon.$$

Därmed gäller enligt definitionen för funktionens gränsvärde att

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \to 0, \text{ kun } x \to 0,$$

alltså är funktionen f deriverbar i punkten 0 och dess derivata vid nämnda punkt är 0.

(Förutom att prova olika funktioner finns det ett till bra sätt att hitta på en lämplig funktion g, genom att märka att differensbråket av f fås till formen

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{xg(x) - 0g(0)}{x - 0} = \frac{xg(x)}{x} = g(x),$$

alltså är derivatans definition

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \to A, \text{ då } x \to 0$$

nu ekvivalent med

$$g(x) \to A, \text{ då } x \to 0.$$

Därmed går det att välja vilken som helst kontinuerlig funktion g för detta, eftersom det för en kontinuerlig funktion g gäller enligt definititionen för kontinuitet att

$$g(x) \to g(0), \text{ då } x \to 0,$$

alltså är derivatans värde därmed $A = g(0)$.

Ett alternativt kortare sätt att visa deriverbarheten av funktionen f i fallet $g(x) = 0$ skulle vara att nu märka, att enligt sats 4.1.14 är funktionen $g(x) = 0$ som en polynomfunktion kontinuerlig och att det enligt slutsatsen ovan gäller från kontinuiteten av funktionen g deriverbarheten av f i punkten $x = 0$.)

(b) Även i detta fall finns det flera alternativ för funktionen g. Exempelvis en diskontinuerlig funktion som får som värde någon konstant för alla negativa värden av x och något annat värde för alla positiva värden för variabeln x uppfyller kravet. Vi väljer exempelvis

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{om } x \leq 0 \\ 1, & \text{om } x > 0 \end{cases}.$$

Denna funktion är helt klart begränsad, eftersom den uppfyller olikheten $|g(x)| \leq 1$. Vi visar nu att $f(x) = xg(x)$ inte är deriverbar i punkten $x = 0$.

<u>Sätt 1.</u> Vi gör beviset först med hjälp av det vänstra och högra gränsvärdet. Enligt derivatans definition är funktionen f deriverbar i punkten x_0 och dess derivata är det reella talet A, om

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to A,$$

då $x \to x_0$. Vi förenklar först differensbråket:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{xg(x) - 0g(0)}{x - 0} = \frac{xg(x)}{x} = g(x).$$

Nu är alltså derivatans definition

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \to A, \text{ då } x \to 0$$

ekvivalent med

$$g(x) \to A, \text{ då } x \to 0.$$

Därmed får vi som de olika sidornas gränsvärden

$$\lim_{x \to 0+} g(x) = 1 \text{ och } \lim_{x \to 0-} g(x) = 0,$$

eftersom det på högra sidan av $x = 0$ gäller $g(x) = 1$ och på vänstra sidan $g(x) = 0$. Nu, eftersom det högra gränsvärdet inte är lika med det vänstra gränsvärdet, så gäller enligt sats 3.2.3 att det inte existerar ett gränsvärde vid nämnda punkt. Därmed har differensbråket

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

inget gränsvärde i punkten $x = 0$, alltså är funktionen f inte deriverbar där.

<u>Sätt 2.</u> Beviset kan också göras direkt med derivatans definition:

Tankar inför beviset: Enligt derivatans definition är funktionen f deriverbar i punkten x_0 och dess derivata är det reella talet A, om

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to A,$$

då $x \to x_0$. Nu är den betraktade funktionen alltså $f(x) = xg(x)$ och vi vill visa att definitionens krav inte uppfylls för något reellt tal A. Vi antar alltså att A är något tal. Genom att använda definitionen för en funktions gränsvärde får vi derivatans definition i formen: för varje $\varepsilon > 0$ existerar det $\delta > 0$, för vilket

$$\left|\frac{xg(x)-0g(0)}{x-0} - A\right| < \varepsilon,$$

då $0 < |x-0| < \delta$. Nu eftersom vi vill visa att detta inte gäller, så måste vi visa att det existerar något $\varepsilon > 0$, så det för alla $\delta > 0$ gäller

$$\left|\frac{xg(x)-0g(0)}{x-0} - A\right| \geq \varepsilon$$

för något x, som det gäller för att $0 < |x-0| < \delta$. Alltså måste vi hitta ett lämpligt $\varepsilon > 0$ för fallet.

Situationen är bättre att betrakta i två fall. Vi betraktar till först fallet $A = 0$ och sedan fallet $A \neq 0$:

(i) *Om* $A = 0$*:*

Vi betraktar först ε-olikhetens vänstra sida

$$\left|\frac{xg(x)-0g(0)}{x-0} - A\right| = |g(x) - A| = |g(x)|.$$

Nu eftersom $0 < |x-0| < \delta$, alltså $0 < |x| < \delta$, så kan vi betrakta fallet $x = \frac{\delta}{2}$. Eftersom det då gäller $x > 0$, så $g(x) = 1$. Nu är alltså $|g(x)| = 1$ och eftersom vi vill hitta ett ε, som är mindre eller lika litet som detta, så kan vi välja exempelvis $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Vi har alltså hittat ett lämpligt ε för fallet.

(ii) *Om* $A \neq 0$*:*

Denna gång får vi inte förenklat ε-olikhetens vänstra sidan vidare från formen $|g(x) - A|$ direkt. Fortfarande gäller $0 < |x| < \delta$, så vi kan undersöka fallet $x = -\frac{\delta}{2}$. Eftersom det då gäller $x < 0$, så $g(x) = 0$ och därmed $|g(x) - A| = |0 - A| = |A|$. Eftersom vi ville hitta ett ε som är mindre eller lika litet som detta, så kan vi välja exempelvis $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$. Vi har alltså hittat ett lämpligt ε för fallet.

Bevis: Låt A vara något tal.

(i) *Om* $A = 0$*:*

Välj $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Låt $\delta > 0$ vara något tal. Välj $x = \frac{\delta}{2}$. Då gäller enligt tankarna ovan att

$$\left|\frac{xg(x)-0g(0)}{x-0} - A\right| = |g(x) - A| = |g(x)| = 1 \geq \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

(ii) *Jos* $A \neq 0$*:*

Välj $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$. Låt $\delta > 0$vara något tal. Välj $x = -\frac{\delta}{2}$. Då gäller enligt tankarna ovan att
$$\left|\frac{xg(x) - 0g(0)}{x - 0} - A\right| = |g(x) - A| = |0 - A| = |A| \geq \frac{|A|}{2} = \varepsilon.$$
Alltså uppfylls definitionens krav inte och därmed är derivatan av funktionen f i punkten $x = 0$ inte något reellt tal A, alltså är funktionen inte deriverbar i nämnda punkt.

L3. Vi betraktar funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som definieras av likheten
$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

(a) Visa att funktionen är deriverbar i punkten $x = 0$.

(b) Visa att derivatafunktionen till funktionen f inte är deriverbar i punkten $x = 0$.

(Detta är en tidigare uppgift från studentskrivningarna.)

Lösning:

(a) Sätt 1. Vi bevisar deriverbarheten först med hjälp av det högra och vänstra gränsvärdet. Enligt derivatans definition är funktionen f deriverbar i punkten x_0 och dess derivata är det reella talet A, om
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to A,$$
då $x \to x_0$. Vi förenklar först differensbråket:
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x}{1+|x|} - \frac{0}{1+|0|}}{x - 0} = \frac{\frac{x}{1+|x|}}{x} = \frac{1}{1 + |x|}.$$
Nu är alltså derivatans definition
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \to A, \text{ då } x \to 0$$
ekvivalent med
$$\frac{1}{1 + |x|} \to A, \text{ då } x \to 0.$$
Då fås de oliksidade gränsvärdena
$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{1 + |x|} \overset{(*)}{=} \lim_{x \to 0+} \frac{1}{1 + x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + x} \overset{(**)}{=} \frac{1}{1 + 0} = 1$$
och
$$\lim_{x \to 0-} \frac{1}{1 + |x|} \overset{(*)}{=} \lim_{x \to 0-} \frac{1}{1 - x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 - x} \overset{(**)}{=} \frac{1}{1 - 0} = 1.$$
Vid skedena (*) har vi använt oss av informationen: då $x > 0$, så $|x| = x$, och då $x < 0$, så $|x| = -x$, och vid skedena (**) det, att funktionerna 1, $1+x$ och $1-x$ som polynomfunktioner enligt sats 4.1.14 är kontinuerliga och enligt sats 4.1.12, eftersom $1 + 0 = 1 \neq 0$ och $1 - 0 = 1 \neq 0$, så är $\frac{1}{1+x}$ och $\frac{1}{1-x}$ som kvoter av kontinuerliga funktioner kontinuerliga i punkten $x = 0$. Eftersom de oliksidade gränsvärdena är

de samma, så gäller enligt sats 3.2.3 att differensbråket har ett gränsvärde i nämnda punkt och därmed är funktionen f deriverbar där.

Sätt 2. Deriverbarheten kan än en gång bevisas direkt med hjälp av derivatans definition:

Tankar inför beviset: Vi måste först hitta på vilket derivatans värde A är, förrän vi kan visa deriverbarheten med hjälp av derivatans definition. Nu skulle en bra gissning vara att värdet A ifråga i punkten 0 skulle vara 1, eftersom det är derivatan av funktionen $\frac{x}{1+x}$ i nämnda punkt. Vi provar alltså om vi får derivatans definition att fungera då $A = 1$.

Genom att använda definitionen för en funktions gränsvärde får vi derivatans definition i formen: för varje $\varepsilon > 0$ existerar det $\delta > 0$, för vilket

$$\left| \frac{\frac{x}{1+|x|} - \frac{0}{1+|0|}}{x-0} - 1 \right| < \varepsilon,$$

då $0 < |x-0| < \delta$. Vi antar alltså att $\varepsilon > 0$ är något tal, och söker ett lämpligt $\delta > 0$, som uppfyller kravet.

Den vänstra sidan av definitionens ε-olikhet kan nu förenklas på följande vis:

$$\left| \frac{\frac{x}{1+|x|} - \frac{0}{1+|0|}}{x-0} - 1 \right| = \left| \frac{1}{1+|x|} - 1 \right| = \left| \frac{1-1-|x|}{1+|x|} \right| = \frac{|x|}{1+|x|} \leq \frac{|x|}{1} = |x|.$$

Vi ville alltså hitta ett $\delta > 0$, med vilket det för det nyligen funna $|x|$ gäller att $|x| < \varepsilon$ då $|x-0| < \delta$, alltså då $|x| < \delta$. Därmed kan vi välja $\delta = \varepsilon$. Det sökta δ har alltså hittats och vi har därmed visat att gränsvärdets definition gäller. Funktionen f är därmed deriverbar i punkten $x = 0$, vilket är det vi ville visa. Dessutom visade sig derivatan faktiskt vara $A = 1$.

Bevis: Låt $\varepsilon > 0$. Välj $\delta = \varepsilon$ och anta att $0 < |x-0| < \delta$. Enligt tankarna ovan gäller att

$$\left| \frac{f(x)-f(0)}{x-0} - 1 \right| \leq |x| = |x-0| < \delta = \varepsilon.$$

Därmed gäller enligt definitionen för en funktions gränsvärde att

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \to 1, \text{ då } x \to 0,$$

alltså är funktionen f deriverbar i punkten 0 och dess derivata är då 1.

(b) Eftersom

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} = \begin{cases} \frac{x}{1+x}, & \text{om } x \geq 0 \\ \frac{x}{1-x}, & \text{om } x < 0 \end{cases},$$

så får vi med hjälp av a-delen och gymnasiets deriveringsregler att

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2}, & \text{om } x > 0 \\ 1, & \text{om } x = 0 \\ \frac{1}{(1-x)^2}, & \text{om } x < 0 \end{cases}.$$

Vi betraktar nu de oliksidade derivatorna. Vi kollar till först den högra sidans derivata, alltså antar vi att $x > 0$. Då får vi från differenskvoten att

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} &= \frac{\frac{1}{(1+x)^2}-1}{x} = \frac{\frac{1-(1+x)^2}{(1+x)^2}}{x} = \frac{1-(1+x)^2}{x(1+x)^2}\\ &= \frac{1-1-2x-x^2}{x(1+x)^2} = \frac{-2x-x^2}{x(1+x)^2} = \frac{-2-x}{(1+x)^2}.\end{aligned}$$

Enligt sats 4.1.14 gäller nu att polynomfunktionerna $-2-x$ och $(1+x)^2 = 1+2x+x^2$ är kontinuerliga. Dessutom $(1+0)^2 = 1 \neq 0$, så enligt sats 4.1.12 är kvoten $\frac{-2-x}{(1+x)^2}$ av kontinuerliga funktioner också kontinuerlig, alltså $\frac{-2-x}{(1+x)^2} \to \frac{-2-0}{(1+0)^2} = -2$, då $x \to 0$. Därmed

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{-2-x}{(1+x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2-x}{(1+x)^2} = \frac{-2-0}{(1+0)^2} = -2$$

alltså är den högra derivatan av funktionen f' nu -2.

Vi betraktar till nästa den vänstra derivatan, alltså antar vi att $x < 0$. Därmed får vi från differenskvoten

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} &= \frac{\frac{1}{(1-x)^2}-1}{x} = \frac{\frac{1-(1-x)^2}{(1-x)^2}}{x} = \frac{1-(1-x)^2}{x(1-x)^2}\\ &= \frac{1-1+2x-x^2}{x(1-x)^2} = \frac{2x-x^2}{x(1-x)^2} = \frac{2-x}{(1-x)^2}.\end{aligned}$$

Enligt sats 4.1.14 gäller nu att polynomfunktionerna $2-x$ och $(1-x)^2 = 1-2x+x^2$ är kontinuerliga. Dessutom $(1-0)^2 = 1 \neq 0$, så enligt sats 4.1.12 är kvoten $\frac{2-x}{(1-x)^2}$ av kontinuerliga funktioner också kontinuerlig, alltså $\frac{2-x}{(1-x)^2} \to \frac{2-0}{(1-0)^2} = 2$, då $x \to 0$. Därmed

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{2-x}{(1-x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2-x}{(1-x)^2} = \frac{2-0}{(1-0)^2} = 2$$

alltså är den vänstra derivatan av funktionen f' nu 2.

Eftersom de oliksidade derivatorna har olika värden i punkten $x = 0$, så har funktionen f' enligt sats 3.2.3 ingen derivata i nämnda punkt.

L4. Betrakta funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, som är definierad av villkoren $f(x) = 1$ då x är ett rationellt tal och $f(x) = 0$ då x är ett irrationellt tal. Visa att det för varje $x_0 \in \mathbb{R}$ gäller att funktionen f är diskontinuerlig i punkten x_0. *Tips:* Tillämpa resultatet från nedanstående Extrauppgift 2.

Lösning:

Sätt 1. Vi bevisar en hjälpsats, av vilket uppgiftens påstående följer:

Hjälpsats: Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och $x_0 \in \mathbb{R}$. Om det existerar ett $u > 0$, så det från alla öppna intervall $]a, b[$ som innehåller talet x_0, hittas talen x och t, för vilka $|f(x) - f(t)| \geq u$, så har funktionen f inte ett gränsvärde i punkten $x = x_0$.

Hjälpsatsens bevis: Låt talet u vara såsom ovan. Välj $\varepsilon = u$. Låt $\delta > 0$. Således existerar det enligt antagandet inom intervallet $]x_0, x_0 + \delta[$ talen x och t, för vilka

$|f(x) - f(t)| \geq u$. Låt x och t nu vara sådana tal och låt $a \in \mathbb{R}$. Enligt antagandet $x \in]x_0, x_0 + \delta[$ gäller för talet x att

$$x_0 < x < x_0 + \delta$$

alltså därmed

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

och då vi subtraherar x_0 från olikhetskedjan, så får vi

$$-\delta < x - x_0 < \delta$$

och från det med hjälp av absolutbeloppslemmat

$$|x - x_0| < \delta.$$

Dessutomföljer från antagandet $x_0 < x$ att $0 < x - x_0$, alltså $0 < |x - x_0|$. Därmed uppfylls kravet $0 < |x - x_0| < \delta$ av definitionen för en funktions gränsvärde. Nu får vi

$$\begin{aligned}|f(x) - a| = |f(x) - f(t) + f(t) - a| &\overset{(*)}{\geq} |f(x) - f(t)| + |f(t) - a| \\ &\geq |f(x) - f(t)| + 0 = |f(x) - f(t)| \geq u = \varepsilon.\end{aligned}$$

(Vid (*) användes triangelolikheten.) Nu gäller alltså för ifrågavarande ε att $|f(x) - a| \geq \varepsilon$ oberoende av vilket som helst δ och gränsvärde a för funktionen f. Därmed uppfylls inte kraven för definitionen av en funktions gränsvärde och funktionen har inte ett gränsvärde i nämnda punkt.

Beviset av uppgiftens påstående: Låt $x_0 \in \mathbb{R}$ och $u = 1$. Då hittas enligt extra uppgift 2 från alla öppna intervall ett rationellt tal x och ett irrationellt tal t. För dessa gäller det enligt definitionen av funktionen f att

$$|f(x) - f(t)| = |1 - 0| = 1 \geq 1 = u,$$

alltså är funktionen f enligt hjälpsatsen ovan diskontinuerlig i punkten $x = x_0$. Av talet x_0 antogs endast att det är ett reellt tal, så det bevisade påståendet gäller för alla reella tal x_0.

Sätt 2. Påståendet kan också bevisas direkt med hjälp av kontinuitetens definition:

Tankar inför beviset: Enligt kontinuitetens definition är funktionen f kontinuerlig i punkten x_0 om

$$f(x) \to f(x_0), \text{ då } x \to x_0.$$

Nu ska vi alltså visa att funktionen f inte är kontinuerlig i någon punkt x_0. Vi antar alltså att x_0 är något tal. Genom att använda definitionen för en funktions gränsvärde fås kontinuitetens definition till formen: för varje $\varepsilon > 0$ existerar det $\delta > 0$, för vilket

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ kun } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Nu eftersom vi vill visa att detta inte gäller, så måste det visas att det existerar ett $\varepsilon > 0$, så det för alla $\delta > 0$ gäller

$$|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon \text{ för något } x, \text{ för vilket } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Vi måste alltså hitta ett lämpligt $\varepsilon > 0$ för fallet.

Situationen är bättre att betraktas i två fall. Vi undersöker till först fallet där x_0 är rationellt, och sedan fallet där x_0 är irrationellt:

(i) *Om x_0 är rationellt:*

Vi betraktar först ε-olikhetens vänstra sida

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - 1|.$$

Nu innehåller intervallet $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ enligt extrauppgift 2 ett irrationellt tal. Vi väljer som värdet av variabeln x detta tal. Således gäller att $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, vilket ger att $-\delta < x - x_0 < \delta$, alltså gäller enligt absolutbeloppslemmat att $|x - x_0| < \delta$, vilket är det vi ville komma fram till.

Nu får vi med värdet av variabeln x att

$$|f(x) - 1| = |0 - 1| = 1,$$

och eftersom vi ville hitta ett ε, som är mindre eller lika litet som detta, så kan vi välja exempelvis $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Vi har alltså hittat ett lämpligt ε för fallet.

(ii) *Om x_0 är irrationellt:*

Vi betraktar igen först ε-olikhetens vänstra sida

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - 0| = |f(x)|.$$

Nu innehåller intervallet $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ enligt extrauppgift 2 ett rationellt tal. Vi väljer som värdet av variabeln x detta tal. Således gäller att $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, vilket ger att $-\delta < x - x_0 < \delta$, alltså gäller enligt absolutbeloppslemmat att $|x - x_0| < \delta$, vilket är det vi ville komma fram till.

Nu får vi för detta värde av variabeln x att

$$|f(x)| = |1| = 1,$$

och eftersom vi ville hitta ett ε, som är mindre eller lika litet som detta, så kan vi välja exempelvis $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Vi har alltså hittat ett lämpligt ε för fallet.

Bevis: Låt x_0 vara något tal.

(i) *Om x_0 är rationellt:*

Välj $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Låt $\delta > 0$ vara något tal. Välj ett irrationellt tal $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Då gäller enligt tankarna ovan att

$$|f(x) - f(x_0)| = 1 \geq \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

(ii) *Om x_0 är irrationellt:*

Välj $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Låt $\delta > 0$ vara något tal. Välj ett rationellt tal $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Då gäller enligt tankarna ovan att

$$|f(x) - f(x_0)| = 1 \geq \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Således uppfylls inte definitionens krav och därmed är funktionen f inte kontinuerlig i punkten x_0. Eftersom vi antog om x_0 endast att det är ett reellt tal, så har funktionen f nu bevisats vara diskontinuerlig i alla punkter $x_0 \in \mathbb{R}$.