1. Undersök med hjälp av kontinuitetens (ε, δ)-definition om funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{4} + 2, & x < 4, \\ \dfrac{x}{4}, & x \geq 4, \end{cases}$$

är kontinuerlig i punkten $x = 4$.

2. Låt $f : [-1, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = xe^{-x}, \quad x \geq -1.$$

(a) Bestäm de lokala extremvärdespunkterna till funktionen f.
(b) Bestäm det största och det minsta värdet till funktionen f.

3. Man betraktar ekvationen $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 4$, då $x \geq 0$.
(a) Visa att ekvationen har en lösning.
(b) Visa att ekvationen har exakt en lösning.

4. Det *geometriska medeltalet* av de positiva talen a och b är $\sqrt{ab}$. Visa att det geometriska medeltalet av talen a och b, där $b > a > 0$, erhålls från den punkt $\xi \in (a, b)$ som förekommer i medelvärdessatsen för funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Obs! Ett svar som har erhållits med hjälp av en kalkylator räcker inte som motivering i någon av uppgifterna.

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
2. kursprovet 18.12.2014

Lämna utrymme ovan på första sidan av svarspappret för antecknandet av poängtalen.

1. Bestäm med hjälp av kursens kunskaper

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x-1)(x-2)}{x^2+3}.$$

I uppgiften får man använda kursens satser samt kunskap om gränsvärdet av konstanta funktioner och funktionen $f(x) = x$.

2. Definiera funktionen $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ med ekvationen

$$f(x) = x - \ln x.$$

Visa att f är växande i intervallet $[1,\infty)$.

3. Visa att det finns $x \in \mathbb{R}$ för vilken gäller att

$$\frac{3+\sin x}{x^2+1} = \frac{1}{7}.$$

4. Anta att funktionen f är kontinuerlig i intervallet $(-1,1)$ och deriverbar i intervallen $(-1,0)$ och $(0,1)$. Anta att för alla $x \in (-1,0)$ gäller att $f'(x) = x+2$ och för alla $x \in (0,1)$ gäller att $f'(x) = x^2+2$. Visa noggrant att f är deriverbar i punkten $x = 0$.

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Analys I

2. kursprovet 12.12.2013

Lämna utrymme ovan på första sidan av svarspappret för att anteckna poängtalen.

1. Bestäm

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

I uppgiften får man använda kursens kunskaper om egenskaperna för gränsvärdet av funktioner. Kunskaper som berör kontinuitet får inte användas.

2. Visa på basen av definitionen av gränsvärdet för en funktion att

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} = 7.$$

3. Visa att det för varje $x \geq 0$ gäller att

$$e^x \geq x + 1.$$

Det lönar sig att tillämpa medelvärdessatsen på exponentfunktionen i intervallet $[0, x]$.

4. Anta att funktionen $f\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig och att $f(0) > 0$. Anta dessutom att $f(x) \to 0$ då $x \to -1^+$ och då $x \to 1^-$. Visa att det finns $c \in (-1, 1)$, så att det för varje $x \in (-1, 1)$ gäller att $f(x) \leq f(c)$. Med andra ord, visa att det finns ett största värde bland de värden som f antar på intervallet $(-1, 1)$.

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Analys I

2. kursprovet 13.12.2012

Uppgifterna har ordnats enligt ämnesområdet.

1. Bestäm

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 + 1}{6x + 1}.$$

Kom ihåg att noggrant motivera beräkningarna på basen av kursens fakta.

2. Vi definierar $f(0) = 0$ och

$$f(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x^3})$$

då $x \neq 0$. Visa att funktionen f är deriverbar i punkten $x = 0$.

3. Anta att funktionen f är kontinuerlig i intervallet $]1, 2[$. Anta dessutom att

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = 3 \text{ samt att } \lim_{x \to 2-} f(x) = \infty.$$

Visa att det finns $a \in]1, 2[$ för vilken gäller att $f(a) = 7$.

4. Vi definierar $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. Visa att för alla $x \geq 0$ gäller att

$$\sinh(x) - \sin(x) \geq 0.$$

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
2. kursprovet 15.12.2011

1. Bestäm

$$\lim_{x\to 2}\left(x^3 + \frac{3x+1}{2x+3}\right)$$

med hjälp av kursens satser. Noggrann motivering!

2. Undersök var funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är växande, då funktionen definieras av ekvationen

$$f(x) = e^{1-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Visa att ekvationen

$$e^x + e^{x^3} = 1$$

har åtminstone en lösning.

4. Lös en av uppgifterna 4.1 eller 4.2.

4.1. Anta att $f\colon]0,2[\to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i hela intervallet $]0,2[$. Anta vidare att f är deriverbar i intervallet $]1,2[$ och att

$$\lim_{x\to 1+} f'(x) = \infty.$$

Visa att f inte är deriverbar i punkten $x = 1$.

4.2. Anta att $f\colon]0,3[\to \mathbb{R}$ är deriverbar i hela intervallet $]0,3[$. Anta att $f'(1) = 4$ och $f'(2) = 6$. Vi studerar också den hjälpfunktion som definieras av ekvationen $g(x) = f(x) - 5x$.

(a) Visa att g inte kan få det minsta värdet som g antar i intervallet $[1,2]$ i någondera ändpunkter.

(b) Visa att det finns en punkt c i intervallet $]1,2[$ där det gäller att $f'(c) = 5$. (**Obs.** Vi vet inte att f' är kontinuerlig, så att Bolzanos sats kan inte användas!)

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
2. kursprovet
16.12. 2010

1. Bestäm

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 1}{x^4 + 1}$$

med hjälp av kursens satser. Motivera noggrant!

2. Funktionen f satisfierar för alla $x \leq 0$ villkoret $f(x) = x^3$ och för alla $x > 0$ villkoret $f(x) = x^2$. Är f deriverbar i punkten $x = 0$? Motivera noggrant!

3. Visa att det finns $a \in \mathbb{R}$, så att för alla $x \in \mathbb{R}$ gäller

$$\frac{\sin(e^x)}{x^2 + 1} \leq \frac{\sin(e^a)}{a^2 + 1}.$$

I uppgiften lönar det sig kanske inte att använda derivatan.

4. Definiera funktionen $f\colon]0, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ med villkoret

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Visa att f är strängt avtagande.