Differentialkalkyl: kursprov 22.12.2016
Lösningsförslag (Obs.: INTE korrigerarens modellsvar)
referensen [HKK] avser kursboken Harjulehto, Klén & Koskenoja

1. Visa att
$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x+2}{x-2} = \infty.$$

Lösningsförslag: om $M > 0$ är godtyckligt och $x > 2$, så är
$$\frac{x+2}{x-2} \geq \frac{2}{x-2} > M$$
om $0 < x - 2 < \frac{2}{M}$. Vi kan alltså välja $\delta = \frac{2}{M}$ i definitionen, jämför [HKK, uppgift 3.2.12].

2. Betrakta den funktion $f\colon [0,2] \to [0,160]$ som definieras av ekvationen $f(x) = x^5 + x^7$. Visa att funktionen f har en strängt växande kontinuerlig invers funktion $g\colon [0,160] \to [0,2]$, som är deriverbar i intervallet $]0,160[$. Bestäm $g'(2)$.

Lösningsförslag: polynomet $f(x) = x^5 + x^7$ är kontinuerligt deriverbar och $f'(x) = 5x^4 + 7x^6 > 0$ för alla $x > 0$. Teorin [HKK, 5.3.12] implicerar att f är strängt växande i $[0,2]$, där $f(0) = 0$ och $f(2) = 160$. Bolzanos sats (eller [HKK, 4.2.3]) ger att bilden $f([0,2]) = [0,160]$, så att f definierar en bijektion $[0,2] \to [0,160]$. Låt $g = f^{-1}$ vara den inversa funktionen $[0,160] \to [0,2]$, som är strängt växande i $[0,160]$.

Eftersom $f'(x) > 0$ då $x > 0$, så ger deriveringsregeln för inversa funktioner [HKK, 5.2.13] att den inversa funktionen g är deriverbar i $(0,160)$. Eftersom $f(1) = 1 + 1 = 2$ så är $g(2) = 1$ och
$$g'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{12}.$$

3. Visa att den funktion som definieras av ekvationen $f(x) = |x^2 - 2x|$ inte är deriverbar i punkten $x = 2$.

Lösningsförslag: definitionen av $f(x) = |x^2 - 2x| = |x| \cdot |x - 2|$ ändras i punkten $x = 2$, så vi undersöker höger- och vänsterderivatorna $f'_+(2)$ och

$f'_-(2)$. Om $h > 0$ så är

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{h(2+h)}{h} = 2+h,$$

så att

$$f'_+(2) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 2.$$

Om $h < 0$ så att $2+h > 0$, så är

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{|2+h|\cdot|h|}{h} = -(2+h),$$

så att

$$f'_-(2) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = -2.$$

Eftersom $f'_+(2) \neq f'_-(2)$ så är f inte deriverbar i $x = 2$, jämför [HKK, 5.1.8 och 5.1.9].

4. Betrakta den funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som definieras av ekvationen

$$f(x) = \frac{x^2 \sin(e^{x^2})}{(x^4+1)e^{\sin x}}.$$

Visa att det finns ett reellt tal $a \in \mathbb{R}$, så att det för alla $x \in \mathbb{R}$ gäller att $f(x) \leq f(a)$. Obs.: I denna uppgift lönar det sig inte att undersöka derivatan!

Lösningsförslag: värdet $c = f(1) = \frac{\sin(e)}{2e^{\sin(1)}} > 0$ eftersom $\frac{\pi}{2} < e < \pi$ och $\sin(x) > 0$ då $x \in (0, \pi)$. Notera vidare att

$$|f(x)| = \frac{x^2 |\sin(e^{x^2})|}{(x^4+1)e^{\sin x}} \leq e \cdot \frac{x^2}{x^4+1} \leq \frac{e}{x^2}$$

för alla x med $|x| \geq 1$. Ovan användes att $|\sin(t)| \leq 1$ för alla t så att $e^{\sin x} \geq e^{-1}$ för alla x. Det följer att $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$. Nämligen, om $\varepsilon > 0$ givet så är

$$|f(x)| \leq \frac{e}{x^2} = \frac{e}{|x|^2} < \varepsilon$$

om $|x| > \sqrt{\frac{e}{\varepsilon}}$ (och $|x| > 1$).

Mot talet $c = f(1) > 0$ finns alltså $M > 1$ så att $|f(x)| < c$ för alla x med $|x| > M$. Eftersom f är kontinuerlig i $\mathbb{R}$ (motivera) så ger minmaxsatsen [HKK,4.3.3] att det finns $a \in [-M, M]$ så att

$$f(x) \leq f(a)$$

för alla $x \in [-M, M]$. Om $|x| > M$ så är

$$f(x) < c = f(1) \leq f(a)$$

eftersom $1 \in [-M, M]$. Kombinera dessa: $f(x) \leq f(a)$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Varning: formeln för funktionen f är sådan att det **inte** är möjligt att finna det största värdet i $\mathbb{R}$ genom att derivera och undersöka $f'(x) = 0$, utan man behöver teorin.