INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Differentialkalkyl 2016
Uppgifter 6 A och L
Veckan 5.12-9.12.2016

Vi repeterar diffentialkalkyl: derivatans definition, medelvärdessatsen osv. I uppgifterna A3, A4 och L4 är avsikten att lämpligen använda medelvärdessatsen i täljaren av differenskvoten. Uppgift A3 visar att derivatafunktionen inte kan ha punkter där den hoppar (ifall derivatan existerar). Uppgifterna L5 och L6 visar att derivatafunktionen inte nödvändigtvis är kontinuerlig (eller ens begränsad i slutna intervall). [HKK] avser kursboken av Harjulehto, Klen & Koskenoja.

Påminnelse: föreläsningen tisdag 6.12 flyttas till **måndag 5.12 kl 14-16 sal C321** och räkneövningen från tisdag till **onsdag 7.12 kl 12.30-14 sal BK106**.

Uppgifter A1– A4 för gemensam genomgång i början av veckan.

A1 Vi betraktar funktionerna som definieras av ekvationerna $f(x) = x + 2\sin x$ och $g(x) = x + \sin x$ i hela mängden av reella tal.
a) Utred de lokala extremvärdena till funktionen f.
b) Utred de lokala extremvärdena till funktionen g.

A2 (Uppgift 5.3.20 från [HKK]) Hur stort fel gör man högst när man beräknar värdet av uttrycket $\sqrt{\pi}$ genom att använda närmevärdet $3,14$ för talet π. *Tips:* jämför med feluppskattningen i uppgift 5.3.19 i [HKK].

A3 Anta att funktionen $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$ är deriverbar i hela definitionsintervallet. Anta att de ensidiga gränsvärdena

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) \text{ och } \lim_{x\to 0^+} f'(x)$$

existerar. Visa att då gäller att

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = f'(0).$$

A4 Anta att funktionen $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$ är deriverbar åtminstone i intervallet $]0,1[$ samt att

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \infty.$$

Visa att funktionen f inte är deriverbar i punkten $x = 0$.

Hemuppgifter L1–L6 för slutet av veckan.

L1 Vi betraktar funktionen $f\colon [1,3] \to \mathbb{R}$. Anta att f är kontinuerlig i intervallet $[1,3]$ och deriverbar i intervallet $]1,3[$. Anta dessutom att för alla $x \in]1,3[$ gäller att $2 \leq f'(x) \leq 4$ samt att $f(1) = 5$. Vad kan man säga om värdet $f(3)$?

L2 Vi betraktar funktionen $f\colon [1,3] \to \mathbb{R}$. Anta att f är kontinuerlig i intervallet $[1,3]$ och deriverbar i intervallet $]1,3[$. Anta dessutom att för alla $x \in]1,3[$ gäller att $2 \leq f'(x) \leq 4$ samt att $f(3) = 5$. Vad kan man säga om värdet $f(1)$?

L3 Anta att funktionen $f\colon]1,3[\to \mathbb{R}$ satisfierar villkoret $f'(2) = 5$. Bestäm

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+5h) - f(2-7h)}{3h}.$$

Tips: Modifiera det uttryck som studeras så att du får fram differenskvoterna

$$\frac{f(2+5h) - f(2)}{5h} \quad \text{och} \quad \frac{f(2-7h) - f(2)}{-7h}.$$

L4 Anta att funktionen $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$ är deriverbar åtminstone i intervallen $]-1,0[$ och $]0,1[$, samt att f är kontinuerlig i punkten $x = 0$. Anta att

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} f'(x).$$

Visa att f är deriverbar i punkten $x = 0$ samt att

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = f'(0).$$

L5 Definiera funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genom $f(0) = 0$ och

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \neq 0.$$

Visa att f är deriverbar i hela mängden av reella tal.

L6 Visa att derivatafunktionen f' till funktionen f i uppgift L5 inte är begränsad i intervallet $[-1,1]$. Förklara varför det följer att derivatafunktionen inte kan vara kontinuerlig i detta slutna intervall.