

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Differentialkalkyl 2016
Uppgifter 5 A och L
Veckan 28.11-2.12.2016

Vi inleder studiet av differentialekalkylen: deriverbarhet, sammansatta funktioner och inversa funktioner. Efter detta tittar vi på saker som berör medelvärdessatsen. [HKK] avser kursboken av Harjulehto, Klen & Koskenoja.

Föreläsningen tisdag 6.12 flyttas till **måndag 5.12 kl 14-16 i sal C321**.

Uppgifter A1–A4 för början av veckan för gemensam genomgång.

A1 Derivera den funktion som definieras av uttrycket $f(x) = \sqrt[3]{x}$ med hjälp av räkneregler för potenser och för den inversa funktionen.

A2 Derivera den funktion som definieras av uttrycket $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ med hjälp av räkneregler för potenser, den inversa funktionen och den sammansatta funktionen.

A3 Visa att den funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som definieras av ekvationen $f(x) = x + x^3 + x^5$ har en invers funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, som är strängt växande, kontinuerlig och deriverbar. Bestäm $g'(3)$.

A4 Betrakta den funktion som definieras av ekvationen $f(x) = x^3$ i intervallet $[0, 1]$. Verifiera att man kan tillämpa medelvärdessatsen. Bestäm punkten ξ (dvs. någon av punkterna) som medelvärdessatsen ger.

Kan man av resultatet dra slutsatsen att man nödvändigtvis behöver veta i beviset av medelvärdessatsen att mängden av reella tal är fullständig?

Hemuppgifter L1– L6 för slutet av veckan.

L1 Visa på basen av definitionerna av potenser (med heltalsexponenter) och rötter (med heltal som ordning) att de två definitionerna

$$2^{\frac{3}{5}} = \left(\sqrt[5]{2}\right)^3$$

och

$$2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}$$

av bråktalspotensen $2^{\frac{3}{5}}$ ger samma resultat.

L2 Derivera den funktion som definieras av uttrycket $f(x) = \sqrt[5]{x}$ med hjälp av räknereglerna för potenser och för den inversa funktionen.

L3 Derivera de funktioner som definieras av följande uttryck:

- (a) $f(x) = \cos(3x)$;
- (b) $g(x) = (\cos(3x))^2 + 1$;
- (c) $h(x) = \sqrt{(\cos(3x))^2 + 1}$.

L4 Härled (på nytt) deriveringsregeln för produktfunktionen (dvs. Leibniz regel) med hjälp av Satserna 5.2.9 och 5.2.10 i [HKK]. *Tips:* multiplicera ledvis differentialuttrycken

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + hu(h)$$

och

$$g(x_0 + h) = g(x_0) + g'(x_0)h + hv(h)$$

som hör till ovanstående satser. (Kommentar: Leibniz regel härleddes på föreläsningen onsdag 23.11 med hjälp av ”produkttricket”.)

L5 (Uppgift 5.3.17 från [HKK]) Visa med hjälp av medelvärdessatsen att

$$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$$

för alla $x > 0$.

L6 (Uppgift 5.3.24) Anta att a, b och c är reella tal samt att $a > 0$. Definiera funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ med ekvationen

$$f(x) = x^4 + ax^2 + bx + c.$$

Visa att funktionen f har högst två olika nollställen (dvs. rötter).