INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Differentialkalkyl 2016
Uppgifter 4 A och L
Veckan 21.11-25.11.2016

På basen av feedback från studeranden ändras det praktiska från och med denna övning, så att det nu finns 4 uppgifter för gemensam genomgång i början av veckan samt 6 hemuppgifter i slutet av veckan. (Extrapoängen flyttas på liknande sätt.) [HKK] avser kursboken av Harjulehto, Klen & Koskenoja

Vi studerar saker som berör kontinuitet och derivator för funktioner. I några uppgifter övar vi också att läsa matematisk text.

Uppgifter A1–A4 för början av veckan för gemensam genomgång.

A1 Lös uppgift 4 från den långa matematikens studentprov våren 2016. Denna uppgift med tillhörande bild finns exempelvis på sidan

http://yle.fi/aihe/artikkeli/2016/02/24/kevat-2016-matematiikka-pitka-oppimaara

Du får använda de kunskaper om derivatan som är kända från skolan.

A2 Visa att funktionen f är kontinuerlig i det slutna intervallet $[a, b]$ om och endast om för alla $\varepsilon > 0$ och alla $x \in [a, b]$ finns ett $\delta > 0$, så att för alla $t \in [a, b]$ gäller: om $|x - t| < \delta$, så är $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$.

A3 Bekanta dig med det differentialuttryck som behandlas i punkterna 5.2.9 och 5.2.10 i [HKK]. Sök deriveringsregeln för funktionen $f(x) = x^3$ på basen av ovanstående resultat direkt från ekvationen

$$(x + h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$

utan att använda differenskvoten. *Tips:* Identifiera delarna till differentialuttrycket från ovanstående formel.

A4 Bekanta dig med definitionen av *likformig kontinuitet* från punkt 4.4.1 i [HKK], och visa att den funktion $f\colon]0, 1[\to \mathbb{R}$ som definieras av ekvationen $f(x) = \frac{1}{x}$ inte är likformigt kontinuerlig.

Vilken är skillnaden mellan definitionen av likformig kontinuitet och villkoret från uppgift 4:A2? (Likformig kontinuitet diskuteras inte mera under höstens kurs. Detta begrepp är dock till och med viktigare än kontinuitet, och det fundamentala resultatet Sats 4.4.5 från [HKK] behövs på vårens kurs exempelvis för att visa att (Riemann-)integralen är definierad för varje kontinuerlig funktion.)

Hemuppgifter L1– L6 för slutet av veckan.

L1 Skissera grafen av någon funktion, för vilken grafen av derivatafunktionen kunde se ut som på bilden i uppgift A1. (En skissartad lösning räcker.)

L2 Anta att funktionen f är definierad åtminstone i något intervall $]x_0 - r, x_0 + r[$ förutom eventuellt i punkten x_0. Visa att följande villkor är ekvivalenta:
(a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$, och
(b) $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = a$.

L3 Anta att funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig. Anta dessutom att $f(x) \to 0$ då $x \to -\infty$ och då $x \to \infty$. Visa att det finns en punkt c, så att ett av följande alternativ gäller:
(a) För alla $x \in \mathbb{R}$ gäller att $f(x) \leq f(c)$.
(b) För alla $x \in \mathbb{R}$ gäller att $f(x) \geq f(c)$.

L4 Anta att $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig samt att för alla $x \in [0, 1]$ gäller att $0 \leq f(x) \leq 1$. Visa att det finns en punkt $x \in [0, 1]$ för vilken gäller att $f(x) = x$. *Tips:* Hjälpfunktionen $F(x) = x - f(x)$ är användbar.

L5 Härled deriveringsregeln för funktionen $f(x) = x^4$ direkt från differentialuttrycket i 5.2.9 och 5.2.10 från [HKK] samt ekvationen

$$(x + h)^4 = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$$

utan att använda differenskvoten. *Tips:* Identifiera delarna av differentialuttrycket från ovanstående formel.

L6 Betrakta den funktion som definieras av ekvationen $f(x) = x^2$. Anta att $x \in \mathbb{R}$. Bestäm uttrycket $\alpha(h)$, så att för alla $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gäller att

$$(x + h)^2 = x^2 + 5xh + h\alpha(h).$$

Varför utgör detta resultat inte en motsägelse med 5.2.9 och 5.2.10 i [HKK]?