**INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK**
**Differentialkalkyl 2016**
**Uppgifter 3 A och L**
**Veckan 14.11-18.11.2016**

Vi studerar saker som berör kontinuitet och gränsvärdet för funktioner. I några av uppgifterna övar vi också att läsa matematisk text. Nedan hänvisar [HKK] till kursboken Harjulehto, Klen & Koskenoja och [HS] till kompendiet av Hurri-Syrjänen som finns länkat till kursens hemsida.

**Uppgifter A1–A6 för början av veckan.**

**A1** Betrakta funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, som är definierad av villkoren $f(x) = \frac{1}{x}$ då $x \neq 0$ och $f(0) = 0$. Visa att $f$ antar alla reella värden.

**A2** Lös ekvationen $\sin x = \frac{1}{2}$.

**A3** Anta att $A \subset \mathbb{R}$ och $f\colon A \to \mathbb{R}$. Låt

$$m = \sup\{f(x) \mid x \in A\}.$$

Vi antar dessutom att för alla $x \in A$ gäller att $f(x) < m$. Visa att den funktion $g$ som definieras av uttrycket

$$g(x) = \frac{1}{m - f(x)}$$

inte är uppåt begränsad i mängden $A$.

**A4** Anta att den växande funktionen $f$ är definierad åtminstone då $x \in ]a, b[$. Anta att $x_0 \in ]a, b[$.
(a) Visa att de ensidiga gränsvärden $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ och $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ existerar.
(b) Visa att $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$.
*Tips:* Undersök Sats 3.3.4 (sida 68) i boken [HKK].

**A5** Kompendiet [HS] *Differential- och Integralkalkyl I.1* av Ritva Hurri Syrjänen finns länkat till hemsidan av kursen *Differentialkalkyl.* På sidan 86 ges fem axiom (basegenskaper) för funktionerna sinus och cosinus, som bildar en lista på några av de kända egenskaperna från skolan för dessa funktioner. Övriga egenskaper kan härledas från dessa axiom.

Visa på basen av dessa axiom att funktionerna $x \mapsto \sin(x)$ och $x \mapsto \cos(x)$ är kontinuerliga i punkten $x = 0$. (Beviset är skisserat på sidan 87 och detta får naturligtvis användas som utgångspunkt.)

**A6** (Fortsättning på uppgift A5) Visa att $x \mapsto \sin(x)$ och $x \mapsto \cos(x)$ är kontinuerliga i mängden av reella tal.

**Uppgifter L1– L4 för slutet av veckan, och till sist två extrauppgifter avsedda för ”eget arbete”.**

**L1** Lös ekvationen $x^7 + x^3 = 1$ med tre decimalers noggrannhet med hjälp av ”gaffelmetoden”.

**L2** Betrakta funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som satisfierar egenskaperna $f(0) = 0$ och

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Anta dessutom att funktionen $f$ är kontinuerlig i varje punkt $x \neq 0$. Visa att funktionen $f$ antar alla reella värden. (Jämför resultatet med uppgift 3:A1.)

**L3** Anta att funktionen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig och att för alla $x$ gäller att $0 \leq g(x) \leq 3$. Definiera funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med ekvationen

$$f(x) = \frac{g(x)}{x^2 + 1}.$$

Visa att det finns ett största värde bland de värden som funktionen $f$ antar.

**L4** (Fortsättning på uppgift 3:A6) Visa att derivatan av funktionen $\sin(x)$ är $\cos(x)$. *Tips:* undersök sidorna 87-88 i kompendiet [HS]. (Härledningen i [HS] innehåller ett par mindre brister. Kan du finna dessa?)

**Extrauppgift 1** Anta att funktionen $f\colon ]0,2[ \to \mathbb{R}$ är deriverbar i punkten $x = 1$, samt att $f(1) = 7$ och $f'(1) = 3$. Visa att det finns ett sådant $r > 0$ att för alla $x \in \,]1, 1 + r[$ gäller att

$$7 + (3 - 10^{-100})(x - 1) < f(x) < 7 + (3 + 10^{-100})(x - 1).$$

*Tips:*: Kom ihåg att derivatan definieras som gränsvärdet för differenskvoten. Modifiera uttrycket

$$\left| \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} - 3 \right| < 10^{-100}.$$

Vad sker på vänstra sidan av punkten $x = 1$?

**Extrauppgift 2** Fundera om det är möjligt att utveckla ett bevis av Bolzanos sats på basen av ”gaffelmetoden”?