**INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK**
**Differentialkalkyl 2016**
**Uppgifter 2 A och L**
**Veckan 7.11-11.11.2016**

På kursen *Differentialkalkyl* ändras de praktiska arrangemangen från kursen *Gränsvärden* så att det nu finns 6 hemuppgifter för början av veckan samt 4 uppgifter för gemensam genomgång under slutet av veckan. Nedan hänvisar [HKK] till kursboken Harjulehto, Klen & Koskenoja.

Till sist ett par extrauppgifter som personliga hobbyuppgifter för personer med intresse av sådana funderingar. Avsikten att inte att behandla dessa extrauppgifter under övningen (vid behov kan man fråga föreläsaren).

**Uppgifter A1–A6 för början av veckan.**

**A1** Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+1}{x^2+2}$$

med hjälp av kursens kunskaper. Du får använda faktan om gränsvärden för konstanta funktioner och funktionen $f(x) = x$. (Påminn vid behov hur dessa verifieras på basen av definitionen av gränsvärdet.) Kom också ihåg att Sats 3.1.11 i [HKK] har formen ”om …, så …”.

**A2** Visa direkt på basen av definitionerna av gränsvärdet och kontinuitet att den funktion som är definierad av ekvationen $f(x) = |x|$ är kontinuerlig i hela mängden av reella tal.

**A3** Visa direkt på basen av definitionerna av gränsvärdet och kontinuitet att den funktion som är definierad av ekvationen $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ är kontinuerlig i hela mängden av reella tal.

**A4** Anta att funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig överallt. Visa direkt på på basen av definitionerna att också den funktion $g$ som definieras av ekvationen $g(x) = f(x)^2$ är kontinuerlig överallt.

**A5** Visa att

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x+1}{x+2} = 1.$$

**A6** Visa att

$$\lim_{x \to 1+} \frac{x^2+2}{x-1} = \infty$$

(jämför med Definition 3.1.13 i [HKK]).

**Uppgifter L1– L4 för slutet av veckan.**

**L1** Anta att den överallt kontinuerliga funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ endast antar värden $f(x) \geq 0$. Visa direkt på basen av definitionerna att också den funktion $g$ som definieras av ekvationen $g(x) = \sqrt{f(x)}$ är överallt kontinuerlig.

**L2** Anta att $r > 0$ och att den reellvärda funktionen $f$ är definierad åtminstone då $0 < |x - x_0| < r$. Anta att $f(x) \to a$ då $x \to x_0$. Visa att det finns ett $\delta > 0$ så att för alla $x$ gäller: om $0 < |x - x_0| < \delta$, så $|f(x)| < |a| + 1$.

**L3** Anta att $r > 0$ och att den reellvärda funktionen $f$ är definierad åtminstone då $0 < |x - x_0| < r$. Anta att $f(x) \to a$ då $x \to x_0$, samt dessutom att $a > 0$. Visa att det finns $\delta > 0$, för vilket gäller att $f(x) > \frac{a}{2}$ för alla $x$ som satisfierar $0 < |x - x_0| < \delta$. (Kan du formulera ett liknande resultat i fallet $a < 0$? Vad kan man säga om $a = 0$?)

**L4** Anta att att den reellvärda funktionen $f$ är definierad åtminstone då $|x| < 1$ och $f(0) = 0$. Anta att

$$\frac{f(x)}{x} \to 42$$

då $x \to 0$. Visa att funktionen $f$ är kontinuerlig i punkten $x = 0$. Tips: tillämpa resultatet från uppgift L2.

**Extrauppgift 1** Kan du modifiera lösningen av uppgift L4 till ett bevis av resultatet att om $f$ är deriverar i punkten $x_0$, så är $f$ också kontinuerlig i punkten $x_0$?

**Extrauppgift 2** Anta att funktionen $f\colon ]x_0, x_0 + 1[ \to \mathbb{R}$ satisfierar följande villkor. För varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$, så att för varje reella tal $x$ och $t$ gäller: om $0 < x - x_0 < \delta$ och $0 < t - x_0 < \delta$, så är $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$. Visa att då existerar högergränsvärdet $\lim_{x \to x_0+} f(x)$. Tips: visa först att talföljden $(f(x_0 + \frac{1}{n}))$ är en Cauchy-följd och alltså då konvergerar enligt Sats 2.4.4 i [HKK].