INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Differentialkalkyl 2016
Uppgifter 1 L
Veckan 30.10-4.11.2016

På kursen *Differentialkalkyl* ändras de praktiska arrangemangen från kursen *Gränsvärden* så att det nu finns 6 hemuppgifter för början av veckan samt 4 uppgifter för gemensam genomgång under slutet av veckan.

Uppgifter A1–A6 för slutet av veckan. Under första veckan finns det inte uppgifter för början av veckan.

Uppgifter L1–L4 för slutet av veckan. Vi fortsätter med att fundera på saker från slutet av kursen *Gränsvärden* före vi börjar betrakta den egentliga teorin för kontinuerliga funktioner. Påminn här om definitionerna av kontinuitet och derivatan (deriverbarhet) från kursen *Gränsvärden.*

Dessutom finns här till sist två extrauppgifter avsedda ”för eget intresse”. Till extrauppgift 2 torde vi återkomma på föreläsningarna vid lämpligt tillfälle.

L1 Anta att funktionen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är begränsad (dvs. det finns $M > 0$, så att det för alla $x \in \mathbb{R}$ gäller att $|g(x)| \leq M$). Definiera funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med ekvationen $f(x) = xg(x)$. Visa att funktionen f är kontinuerlig i punkten $x = 0$.

L2 (Fortsättning på uppgift L1)

(a) Ge ett exempel på en begränsad funktion g, så att funktionen f från uppgift L1 också är deriverbar i punkten $x = 0$. Motivera!

(b) Ge ett exempel på en begränsad funktion g, så att funktionen f från uppgift L1 inte är deriverbar i punkten $x = 0$. Motivera!

L3 Vi betraktar funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som definieras av likheten

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

(a) Visa att funktionen är deriverbar i punkten i punkten $x = 0$.

(b) Visa att derivatafunktionen till funktionen f inte är deriverar i punkten $x = 0$.

(Detta är en tidigare uppgift från studentskrivningarna.)

L4 Betrakta funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, som är definierad av villkoren $f(x) = 1$ då x är ett rationellt tal och $f(x) = 0$ då x är ett irrationellt tal. Visa att det för varje $x_0 \in \mathbb{R}$ gäller att funktionen f är diskontinuerlig i punkten x_0. *Tips:* Tillämpa resultatet från nedanstående Extrauppgift 2.

Extrauppgift 1 Definiera talföljden (x_n) med ekvationerna $x_1 = 0$ och

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{x_n} + 2).$$

Visa att följden konvergerar och bestäm dess gränsvärde.

Extrauppgift 2 Man säger att delmängden A till $\mathbb{R}$ är en *tät delmängd*, om varje icke-tomt öppet intervall (a, b) innehåller (åtminstone) ett element från mängden A. Visa att mängden $\mathbb{Q}$ av rationella tal och mängden $\mathbb{Q}^c$ av irrationella tal är täta delmängder.