Fysiikan matemaattiset menetelmät Ib Harjoitus 6

Syksy 2016 Ma 12.12.2016

1) Nämä ovat FYMM Ib -kurssin viimeiset laskarit. Linkki **kurssipalautelomakkeeseen** löytyy kurssin kotisivuilta, ja siihen voi vastata milloin tahansa **ma 12.12. klo 8 saakka**. Vastaamisesta saa taas 3 laskuharjoituslisäpistettä.

2) Kurssikokeessa 22.12. jaetaan koepaperin mukana kaavakokoelma. Kaavakokoelman sisältöön voi käydä tutustumassa kurssin kotisivuilla to 15.12 alkaen.

3) Koetta edeltävällä viikolla järjestetään vielä normaalisti laskaripajat, joihin voi mennä valmistautumaan kokeeseen esimerkiksi laskemalla väliin jääneitä laskaritehtäviä tai vanhoja koekysymyksiä.

Tehtävät 1

Laske funktion

$$f(t) = \theta(t-2)\cosh(2t) + t^{3/2}$$

Laplacen muunnos, missä $\theta(t)$ on Heavisiden porrasfunktio (kutsutaan myös askelfunktioksi),

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x > 0\,, \\ 0, & \text{kun } x < 0\,. \end{cases}$$

(*Vihje:* Tässä ja muissakin tämän kerran tehtävissä voi käyttää luennoilla johdettuja Laplacen muunnoksia hyödyksi.)

Tehtävä 2

(*Tämän tehtävän tarkoitus on tehdä Laplacen käänteismuunnos määritelmästä lähtien. Tehtävän voi halutessaan huoletta jättää viimeiseksi.*)

Funktion $F(s) = \mathrm{e}^{-s}/(s-1)$ Laplacen käänteismuunnos määritellään kaavalla

$$f(t) = \int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{ts} F(s) \frac{\mathrm{d}s}{2\pi\mathrm{i}}\,,$$

jossa $\sigma > 1$. Laske $f(t)$, kun $t \neq 1$, soveltaen residylausetta ja Jordanin lemmaa. Voit halutessasi laskea myös arvon $f(1)$, jonka löytää suoraan integraalifunktiota etsimällä.

(*Vihje:* Kun $R > 0$ on riittävän suuri, voi joko polun $s = \gamma(\phi) = \sigma + \mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, $\phi \in [0, \pi]$, tai polun $s = \gamma(\phi) = \sigma - \mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, $\phi \in [0, \pi]$, yli otettuun integraaliin soveltaa Jordanin lemmaa. Se kumpaa polkua voi käyttää, riippuu t:n arvosta.)

Tehtävä 3

Ratkaise Laplacen muunnosta käyttäen seuraava ns. uusiutumisyhtälö (engl. *renewal equation*)

$$f(t) = \mathrm{e}^{-t} + \int_0^t a\mathrm{e}^{-a(t-\tau)} f(\tau)\mathrm{d}\tau\,, \quad t \geq 0\,,$$

jossa $a > 0$. Laske $\lim_{t\to\infty} f(t)$.

(Jatkuu...)

$\boxed{\text{Tehtävä 4}}$ (tarkastettava tehtävä)

Laske T-jaksollisen funktion $f(t)$ Laplace-muunnos, kun

$$f(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right), & \text{kun } 0 \le t < \frac{T}{2}, \\ 0, & \text{kun } \frac{T}{2} \le t < T. \end{cases}$$

$\boxed{\text{Tehtävä 5}}$

Etsi f, kun tiedetään, että funktion f Laplacen muunnos $F = \mathcal{L}[f]$ on

$$F(s) = \frac{s}{s^2+4} - \frac{2s\mathrm{e}^{-s}}{s^2-4}.$$

(*Vihje:* Tässä ja muissakin tämän kerran tehtävissä voi käyttää luennoilla johdettuja Laplacen muunnoksia hyödyksi.)

$\boxed{\text{Tehtävä 6}}$

Ratkaise Laplacen muunnoksen avulla integrodifferentiaaliyhtälö

$$\int_0^t e^{t-\tau}\sin(t-\tau)x(\tau)d\tau = x''(t) - x'(t) + e^t(1-\cos t),$$

kun $x'(0) = x(0) = 1$.

Tehtävä 7

Olkoot $k > n > 0$. Laske

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(kx)\sin(nx)\mathrm{d}x,$$

kun tiedetään, että integraali $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\frac{\mathrm{d}x}{2\pi}$ antaa Diracin δ-distribuution $\delta(p)$.