Fysiikan matemaattiset menetelmät Ib Harjoitus 5

Syksy 2016 Ma 5.12.2016

Huom: Tällä kertaa tehtäviä on poikkeuksellisesti vain 6 kappaletta.

Tehtävät 1

Kun $g, f \in L^2(\mathbb{R})$ (eli, kun g ja f ovat neliöintegroituvia funktioita), määritellään niiden skalaaritulo kaavalla

$$\langle g|f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)^* f(x)\mathrm{d}x \,.$$

(Tiedetään, että tämä integraali tällöin suppenee itseisesti, joten $\langle g|f\rangle \in \mathbb{C}$.)

Tarkista, että tällä skalaaritulolla on seuraavat ominaisuudet:

(a) $\langle g|f\rangle^* = \langle f|g\rangle$.

(b) $\langle g|\alpha f_1 + \beta f_2\rangle = \alpha \langle g|f_1\rangle + \beta \langle g|f_2\rangle$, kaikilla $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ja $g, f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R})$. (Tässä siis "$\alpha f_1 + \beta f_2$" tarkoittaa funktiota F, joka määritellään kaavalla $F(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$.)

(c) $\langle \alpha g_1 + \beta g_2|g\rangle = \alpha^* \langle g_1|f\rangle + \beta^* \langle g_2|f\rangle$.

Tehtävät 2

Millä reaalisen vakion a arvoilla alla annetut funktiot ovat neliöintegroituvia? (Eli milloin f kuuluu avaruuteen $L^2(\mathbb{R})$?)

$$\text{(a) } f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}}{(1+|x|)^a}, \text{ jossa } p \in \mathbb{R}\,, \qquad \text{(b) } f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-|x|}}{|x|^a}\,.$$

(Jos haluat tutkia asiaa tarkemmin, tee sama useammassa ulottuvuudessa, eli avaruudessa $L^2(\mathbb{R}^d)$. Tällöin siis $\mathbf{x}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$ ja "px" korvataan pistetulolla "$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$".)

Tehtävä 3

Laske funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{4}x^2\,, & \text{kun } 0 < x \leq 2\,, \\ 0\,, & \text{kun } x > 2\,, \end{cases}$$

Fourier'n kosini- ja sinimuunnos (eli Fourier'n muunnos parillista ja paritonta jatketta käyttäen).

Tehtävä 4 (tarkastettava tehtävä)

Laske Lorentzin jakauman

$$f(x) = \frac{\gamma}{\pi(x^2+\gamma^2)}\,, \qquad \gamma > 0\,,$$

Fourier'n muunnos sekä saamasi funktion käänteismuunnos.

(*Vihje:* Residylaskenta.)

(Jatkuu...)

Tehtävä 5

Kvanttimekaniikassa vapaan hiukkasen aaltofunktio ajanhetkellä t voidaan kirjoittaa muodossa

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(px - \frac{\hbar p^2}{2m} t\right)} \frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\,, \tag{1}$$

jossa $m > 0$ on hiukkasen massa, $\hbar > 0$ on Planckin vakio, ja painofunktio $\phi(p)$ huolehtii integraalin suppenemisesta.

(a) Tarkista, että $\Psi(x,t)$ todellakin toteuttaa vapaan hiukkasen Schrödingerin yhtälön,

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t \Psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \Psi(x,t)\,.$$

(b) Etsi $\phi(p)$, kun $\Psi(x,0) = C\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ ja $C, \sigma > 0$. (*Vihje:* Saat laskettua Fourier'n muunnoksen sopivasti integrointipolkua siirtämällä. Jos muistat satulapistemenetelmän, pystyt vaivattomasti päättelemään mikä on "sopiva" integrointipolku, mutta polun löytää myös neliöksi täydentämällä.)

(c) Kvanttimekaniikassa vaaditaan lisäksi normitusehdon $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x |\Psi(x,t)|^2 = 1$ toteutumista kaikilla t. Mikä yksinkertainen oletus funktiosta ϕ takaa, että tämä pätee aina kaavan (1) määrittelemille funktioille? (Vihje: Parseval.)

(d) Tarkastellaan kohdan (b) erikoistapausta. Ratkaise vakion C arvo, jolla kohdan (c) normitusehto toteutuu. Laske tämän jälkeen eksplisiittisesti $\Psi(x,t)$. Huomaa, että aaltopaketti ei pysy koossa ajan kuluessa, vaan laajenee edetessään.

Tehtävä 6

Laske funktion $|\mathbf{r}|^{-a}$, jossa $a > 0$, kolmiulotteinen Fourier'n muunnos:

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{r^a}\right](\mathbf{p}) = \iiint \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\, \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}}{r^a}\,,$$

missä $\mathbf{r} = (x,y,z)$, $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ja $\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} = p_1 x + p_2 y + p_3 z$. Riittää, että annat integraaliesityksen funktiossa esiintyvälle vakiokertoimelle, sen numeerista arvoa ei tarvitse ratkaista. (Vihje: sopivasti valitut pallokoordinaatit ja muuttujanvaihto.)

Laske myös saamasi funktion $\mathcal{F}[r^{-a}](\mathbf{p})$ käänteismuunnoksen määrittelevä kolmiulotteinen Fourier'n integraali. Millä parametrin a arvoilla Fourier'n muunnoksen ja käänteismuunnoksen epäoleelliset integraalit suppenevat? Kun $a \to 1$, saadaan tästä Coulombin potentiaalin (tai Newtonin gravitaatiopotentiaalin) Fourier'n muunnos. Onko rajankäynti laillinen Fourier'n muunnoksessa tai käänteismuunnoksessa?