Fysiikan matemaattiset menetelmät Ib Harjoitus 4

Syksy 2016 Ma 28.11.2016

Tehtävät 1

Oletetaan, että $f(x)$ on jatkuvasti derivoituva L-periodinen funktio. Ilmoita funktion $f'(x)$ Fourier'n kertoimet käyttäen f:n Fourier'n kertoimia $\widehat{f}_k$.

(*Vihje:* Osittaisintegrointi.)

Tehtävä 2

Tarkista alla oleva ns. polarisaatioidentiteetti, jossa w, z ovat mitä tahansa kompleksilukuja:

$$w^* z = \frac{1}{4}\left(|z+w|^2 - |z-w|^2 + \mathrm{i}|z+\mathrm{i}w|^2 - \mathrm{i}|z-\mathrm{i}w|^2\right) .$$

Tehtävä 3

Oletetaan, että $T(x)$, $x \in [0, L]$, on (kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva) reaalifunktio, jonka arvot välin päätepisteissä tunnetaan: $T(0) = T_1$ ja $T(L) = T_2$.

(a) Etsi kertoimet α, β, joilla funktio

$$f(x) := T(x) - \alpha - \beta x ,$$

toteuttaa Dirichlet'n reunaehdot, $f(0) = 0 = f(L)$.

(b) Oletetaan funktion $f(x)$ sinisarjan kertoimet b_k tunnetuiksi,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\Big(k\frac{\pi}{L}x\Big) .$$

Ilmoita toisen derivaatan $T''(x)$ vastaavan sinisarjan kertoimet kertoimien b_k avulla.

$\boxed{\text{Tehtävä 4}}$ (tarkastettava tehtävä)

Tutkitaan funktiota

$$f(x) = \sin(\pi x) .$$

(a) Tämäntyyppisten laskujen helpottamiseksi johda ensin seuraavat kaavat käyttäen eksponenttiesityksiä tai sinin ja kosinin summakaavoja:

$$2\sin x \cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y) ,$$
$$2\sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y) .$$

(b) Etsi f:n sinisarja välillä $[0, 1]$.

(c) Etsi f:n sinisarja välillä $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, eli esitä funktion arvot tällä välillä sarjana

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\bigg(k\pi\Big(x + \frac{1}{2}\Big)\bigg) .$$

Mitä arvoja sarja saa välin päätepisteissä? Entä alkuperäinen funktio f?

(Jatkuu. . .)

Tehtävä 5

Oletetaan, että $0 < \alpha < \pi$. Kirjoita Parsevalin kaava funktiolle

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le \alpha; \\ 0, & \alpha < |x| \le \pi \end{cases}$$

ja laske sen avulla seuraavien sarjojen summat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n\alpha)}{n^2}.$$

Tehtävä 6

Määritä differentiaaliyhtälön

$$y''(x) - 2y(x) = f(x)$$

yleinen ratkaisu $y(x)$ yksityisratkaisun Fourier'n sarjan avulla, kun f on 2π-jaksollinen funktio ($f(x + 2\pi) = f(x)$), joka välillä $[0, 2\pi]$ on

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}.$$

Tehtävä 7

Tarkastellaan L–mittaisen x-akselin suuntaisen sauvan lämpötilajakaumaa $T(t, x)$, jossa paikka $x \in [0, L]$ ja aika $t \geq 0$. Lämmitetään sauvan päitä siten, että origossa olevan pään lämpötila pidetään T_1:nä ja toisen pään lämpötila T_2:na. Jos materiaalin lämmönjohtavuus $\kappa > 0$ ei riipu lämpötilasta, toteuttaa sauvan lämpötilajakauma tällöin ns. lämpöyhtälön

$$\partial_t T(t, x) = \kappa \partial_x^2 T(t, x),$$

ja lisäksi pätee joka hetkellä $T(t, 0) = T_1$ ja $T(t, L) = T_2$.

Etsi lämpötilajakauma $T(t, x)$, $t > 0$, kun alkujakauma $T(0, x) = T_0(x)$ on annettu. Määritä lisäksi, mitä sille tapahtuu, kun $t \to \infty$.

(*Ohje:* Aloita lasku kuten Tehtävässä 3 eli etsi ensin kertoimet α, β, joilla funktio $f(t, x) := T(t, x) - \alpha - \beta x$ toteuttaa Dirichlet'n reunaehdot $f(t, 0) = 0 = f(t, L)$. Käytä tämän jälkeen f:lle sinisarjaesitystä x:ssä, ja ratkaise sarjan kertoimien aikakehitys.)