

Tehtävät 1 & 2

Tässä tehtävässä käsitellään *jatkeita*. Nämä ovat annetun funktion laajennuksia isompaan alueeseen siten, että uusi funktio toteuttaa halutun ehdon, kuten esimerkiksi periodisuuden.

- (a) Olkoon $f(x) = -x$, kun $x \leq 0$. Määritä sen *parillinen* jatke (eli F , jolle $F(x) = F(-x)$ kaikilla x ja $F(x) = f(x)$, kun $x \leq 0$).
- (b) Olkoon $f(x) = 1 - x$, kun $x > 0$. Määritä sen *pariton* jatke F ja laske jatkeelle $F(0)$, sekä raja-arvot $F(0^-)$ ja $F(0^+)$.
- (c) Olkoon $f(x) = x^2$, kun $-1 < x \leq 2\pi - 1$ ja F sen 2π -*periodinen* jatke koko reaaliakselille. Etsi F :n epäjatkuvuuspaikat, sekä sen suurin ja pienin arvo.

Tehtävä 3

- (a) Osoita, että jos f on L -periodinen funktio (eli $f(x + L) = f(x)$), on kaikilla $y \in \mathbb{R}$

$$\int_y^{L+y} f(x)dx = \int_0^L f(x)dx.$$

(Tätä tulosta käytettiin luennoilla, tapauksessa $L = 2\pi$, $y = -\pi$.)

- (b) Oletetaan, että f ja g ovat 2π -periodisia funktioita. Ilmoita funktion

$$F(x) = \int_0^{2\pi} f(x-y)g(y)dy$$

Fourier-kertoimet \widehat{F}_k , $k \in \mathbb{Z}$, funktioiden f ja g Fourier-kertoimien avulla.
(*Vihje*: Integroitijärjestyksen vaihto.)

(Jatkuu...)

Tehtävä 4 (tarkastettava tehtävä)

Laske funktion

$$f(x) = |\cos x|$$

trigonometrinen sarja välillä $[0, 2\pi]$.

Tehtävä 5

Laske funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0; \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Fourier'n sarja välillä $[-\pi, \pi]$. Mitä arvoja sarja saa seuraavissa pisteissä: $x = -1$, $x = 0$ ja $x = 1$?

Tehtävä 6

Laske funktion $f(x) = x \cos x$ trigonometrinen sarja välillä $[-\pi, \pi]$.

Tehtävä 7

Oletetaan, että $|q| < 1$. Laske sinin ja kosinin Eulerin kaavoja käyttäen funktion

$$f(x) = \frac{q \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2}$$

Fourier'n sarja välillä $[-\pi, \pi]$.

(*Vihje:* Residylaskenta.)