Fysiikan matemaattiset menetelmät Ib Harjoitus 2

Syksy 2016 Ma 14.11.2016

Tehtävä 1

(Johdantoa Fourier-analyysiin)

Olkoon $L \geq 1$ kokonaisluku ja $k \in \mathbb{Z}$. Laske

$$\sum_{n=0}^{L-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nk/L} .$$

(*Vihje:* Äärellinen geometrinen summa, mutta huolellisesti sovellettuna eri k:n arvoilla.)

Tehtävät 2 & 3

Osoita, että

(a) $x^a = o(\mathrm{e}^x)$, kun $x \to \infty$, millä tahansa $a \in \mathbb{R}$.

(b) $\mathrm{e}^{-x} = o(x^a)$, kun $x \to \infty$, millä tahansa $a \in \mathbb{R}$.

(c) $\ln x = o(x^{-a})$, kun $x \to 0^+$, millä tahansa $a > 0$.

(d) $\mathrm{e}^{-\sqrt{4+x^2}} \sin(\mathrm{e}^x) = O(\mathrm{e}^{-x})$, kun $x \to \infty$.

(Suuruusluokkanotaatiot ”O” ja ”o” on kerrattu monisteen luvussa 5.4.1.)

$\boxed{\text{Tehtävä 4}}$ (tarkastettava tehtävä)

(Asymptoottinen häiriökehitelmä)

Tarkastellaan funktion

$$F(\lambda) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t-\lambda t^2} \mathrm{d}t , \qquad \lambda \geq 0 ,$$

arvoja kun λ on pieni.

(a) Käytä integrandissa sarjakehitelmää $\mathrm{e}^{-\lambda t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} t^{2n}$. Vaihda n-summan ja t-integraalin järjestystä ja laske saadut t-integraalit käyttäen Γ-funktion ominaisuuksia. Tulos on potenssisarja muuttujassa λ: mikä on sen suppenemissäde?

(b) Johda Taylorin lausetta käyttäen seuraava arvio, joka pätee aina kun $x \geq 0$ ja $N \geq 0$:

$$\left| \mathrm{e}^{-x} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-x)^n}{n!} \right| \leq \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} .$$

(c) Sovella (b)-kohdan tulosta, ja osoita, että kun (a)-kohdan sarja “katkaistaan” sopivasti valittuun arvoon N saadaan aikaan approksimaatio, jonka tarkkuus on eksponentiaalisen hyvä muuttujassa $1/\lambda$ (eli löytyy jokin vakio $a > 0$, jolla virhe on $O(\mathrm{e}^{-a/\lambda})$.)
(*Vihje:* Katkaisukohta voidaan valita siten, että $N = O(1/\lambda)$.)

(Jatkuu. . .)

$\boxed{\text{Tehtävä 5}}$

Gaussista normaalijakaumaa noudattavan satunnaismuuttujan määrää todennäköisyystiheys

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right],$$

jossa $\mu \in \mathbb{R}$ ja $\sigma > 0$.

(a) Osoita, että normalisaatio on oikein valittu: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

(b) Osoita, että jakauman odotusarvo on μ: $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \mu$.

(c) Osoita, että jakauman keskihajonta on σ: $\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)\mathrm{d}x = \sigma^2$

$\boxed{\text{Tehtävä 6}}$

Laske satulapistemenetelmää käyttäen integraalin

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-\sqrt{N}x - x^2}\mathrm{d}x\,,$$

asymptoottinen kehitelmä, kun $N \to \infty$. Laske myös integraalin tarkka arvo ja vertaa tuloksia.

Tehtävä 7

Eräissä kvanttimekaniikan ja optiikan ongelmissa tulee vastaan differentiaaliyhtälön $f''(x) = xf(x)$ ratkaiseminen olettaen, että f menee nollaan, kun $x \to \infty$. Nämä ratkaisut saadaan kertomalla *Airyn funktio* $\mathrm{Ai}(x)$ jollain vakiolla. Airyn funktio määritellään pääarvointegraalina

$$\mathrm{Ai}(x) := \mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{1}{3}t^3 + tx)}\mathrm{d}t\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Laske satulapistemenetelmää käyttäen johtava termi funktion käytökselle, kun $x \to +\infty$.

(*Vihje:* Löytyy kaksi satulapistettä, joista vain toinen osoittautuu relevantiksi. Integrandin käytös suurilla reaaliosan arvoilla kertoo kumpi satulapiste tähän täytyy valita: mieti mitä tapahtuu, kun integrointipolkua yritetään muokata kulkemaan satulapisteen kautta.)