

Ohjeita: Kuten Ia:lla, tarkastettavat tehtävät, joista jokaisesta saa maksimissaan 3 pistettä, on merkitty alla kehyksellä tehtävän numeron ympärillä. Näissä laskareissa tarkastettavia ovat siis tehtävät 4, 5 ja 6.

Muista tehtävistä (1–3 ja 7) saa yhden pisteen per tehtävä. **Merkitse selkeästi vastauspaperin alkuun mitkä tehtävät olet saanut valmiiksi** (tähän riittää, että olet vastannut yli puoleen ko. tehtävän kysymyksistä).

Tehtävät 1 & 2

Tutkitaan funktiota

$$F(z) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{izt} e^{-\sqrt{1+t^2}} dt, \quad |\operatorname{Im} z| < 1.$$

- (a) Osoita, että F on analyyttinen.
(*Vihje:* Jos D on suljettu kiekko annetussa alueessa, löytyy jokin $\varepsilon > 0$, jolla $|\operatorname{Im} z| \leq 1 - \varepsilon$ kaikilla $z \in D$.)
- (b) Etsi funktiot $f_k(t, z)$, $k \in \mathbb{N}$, joiden avulla saadaan F :n k :s derivaatta integraalista $F^{(k)}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t, z) dt$.

Tehtävä 3

Osoita, että sarjana määritelty funktio

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}$$

on integraalina määritellyn funktion

$$f(z) = \int_0^{\infty} \frac{te^{-tz}}{1 - e^{-t}} dt$$

analyyttinen jatko.

(*Vihje:* Aloita todistamalla, että $f(z) = F(z)$ kun z on positiivinen reaaliluku.)

(Jatkuu...)

Tehtävä 4 (tarkastettava tehtävä)

Osoita Eulerin Γ -funktion ominaisuuksia käyttäen, että digammafunktioille $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ ovat voimassa kaavat

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}, \quad \psi(1-z) - \psi(z) = \pi \cot \pi z.$$

Tehtävä 5

Laske integraalit

$$(a) \int_0^\infty x e^{-x^4} dx, \quad (b) \int_0^1 \ln^{z-1}(1/t) dt, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad (c) \int_{-1}^1 (1+x)^{\frac{1}{3}} (1-x)^{-\frac{2}{3}} dx,$$

Eulerin Γ - ja B -funktioiden avulla.

Tehtävä 6

Kuten Ia:ssa osoitettiin, voidaan Riemannin ζ -funktio määritellä sarjana

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z},$$

kun $\operatorname{Re} z > 1$. Johda seuraava esitys eräälle ideaalisen bosonikaasun statistiikassa esiintyvälle integraalille:

$$\int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt = \Gamma(z)\zeta(z), \quad \operatorname{Re} z > 1.$$

Tehtävä 7

Todista seuraava tulos

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}.$$

(Vihje: Exponenttifunktion sarjakehitelmä, muuttujanvaihto ja Γ -funktio.)