Luku 8

Laplacen ja Mellinin muunnokset

Kuten Esimerkin 7.5 jälkeen mainittiin, ei eksponentiaalisesti kasvavista funktioista voi järkevästi suoraan ottaa Fourier'n muunnosta. Samoin tietyissä tilanteissa, joissa esiintyy potenssifunktion tapaista asymptoottista käytöstä äärettömyydessä, voi olla parempi vaihtaa funktion esittämistä varten integraalimuunnoksen määritelmää. Näistä eksponentiaalisen kasvun mahdollistaminen johtaa luonnollisesti tässä luvussa käsiteltävään Laplacen muunnokseen ja toinen potenssifunktiotapaus Mellinin muunnokseen, jota käsitellään lyhyesti luvun lopussa.

8.1 (Lisä) Kaksipuolinen Laplacen muunnos ja Fourier'n muunnoksen analyyttinen jatkaminen

Fourier'n muunnoksen yleistäminen eksponentiaalisesti kasvaville funktioille onnistuu helposti sen analyyttistä jatketta käyttämällä, kunhan funktio on kasvava vain toiseen suuntaa, esimerkiksi kun $x \to \infty$, ja se vähenee vastakkaiseen suuntaan ($x \to -\infty$) tätä kasvua nopeammin. Oletetaankin, että löytyy reaaliluvut a, b, joille $a < b$, ja pätee

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\sigma x}|f(x)|\mathrm{d}x < \infty\,, \qquad a < \sigma < b\,.$$

Tällöin funktion Fourier'n muunnoksen määrittelevä integraali suppenee myös reaaliakselin ympäristössä: kun z on kompleksiluku, jolle $a < -\mathrm{Im}\, z < b$, voidaan määritellä

$$\widehat{f}(z) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}zx} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Kun merkitään $\alpha := \mathrm{Re}\, z$, $\beta := \mathrm{Im}\, z$, on $z = \alpha + \mathrm{i}\beta$, joten $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}zx} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{e}^{\beta x}$ ja $|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}zx}| = \mathrm{e}^{\beta x} = \mathrm{e}^{-(-\beta)x}$. Näin ollen yllä oleva integraali suppenee oletuksen mukaan itseisesti arvoille $a < -\beta < b$.

Näistä oletuksista seuraa itse asiassa, että $\widehat{f}$ on jopa analyyttinen kompleksitason alueessa $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \,|\, a < -\mathrm{Im}\, z < b\}$. Tarkistetaan tämä Lausetta 5.4 käyttäen: Olkoon D jokin suljettu kiekko nauhassa Ω. Tällöin löytyy $\varepsilon > 0$, jolla $a+\varepsilon \leqslant -\mathrm{Im}\, z \leqslant b-\varepsilon$ kaikilla $z \in D$ (ε on esimerkiksi kiekon etäisyys nauhan reunasta). Näin ollen, kun $z \in D$, pätee estimaatti

$$|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}zx} f(x)| = \mathrm{e}^{x\mathrm{Im}\, z}|f(x)| \leqslant M(x) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-(a+\varepsilon)x}|f(x)|\,, & \text{kun } x \geqslant 0\,, \\ \mathrm{e}^{-(b-\varepsilon)x}|f(x)|\,, & \text{kun } x < 0\,. \end{cases}$$

Koska $M(x) \leqslant \left(\mathrm{e}^{-(a+\varepsilon)x} + \mathrm{e}^{-(b-\varepsilon)x}\right)|f(x)|$, jossa $a < a+\varepsilon < b-\varepsilon < b$, integroituvuusoletuksesta seuraa, että $\int_{-\infty}^{\infty} M(x)\mathrm{d}x < \infty$. Koska $z \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}zx} f(x)$ on analyyttinen funktio kaikilla x, säilyttää parametrin x yli integrointi Lauseen 5.4 perusteella analyyttisyyden, eli funktio $\widehat{f}$ on analyyttinen koko nauhassa Ω.

Yllä oletettiin, että funktio $h(x) := \mathrm{e}^{-\sigma x} f(x)$ on itseisesti integroituva kaikilla $a < \sigma < b$. Käänteismuunnoskaavaa varten oletetaan nyt sen sijaan, että se neliöintegroituva, eli $h \in L^2(\mathbb{R})$. Tällöin sen Fourier'n muunnos arvolla $p \in \mathbb{R}$ on

$$\widehat{h}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} \mathrm{e}^{-\sigma x} f(x) \mathrm{d}x = \widehat{f}(p - \mathrm{i}\sigma) ,$$

ja käänteismuunnoskaavan mukaan pätee lisäksi melkein kaikilla x

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} \widehat{h}(p) \frac{\mathrm{d}p}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} \widehat{f}(p - \mathrm{i}\sigma) \frac{\mathrm{d}p}{2\pi} .$$

Koska $h(x) = \mathrm{e}^{-\sigma x} f(x)$, saadaan tästä myös esitys funktion f arvolle pisteessä x,

$$\begin{aligned} f(x) = \mathrm{e}^{\sigma x} h(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{(\sigma + \mathrm{i}p)x} \widehat{f}(p - \mathrm{i}\sigma) \frac{\mathrm{d}p}{2\pi} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{(\sigma + \mathrm{i}p)x} \widehat{f}(-\mathrm{i}(\sigma + \mathrm{i}p)) \frac{\mathrm{d}p}{2\pi} = \lim_{M \to \infty} \int_{\gamma_M} \mathrm{e}^{sx} \widehat{f}(-\mathrm{i}s) \frac{\mathrm{d}s}{2\pi \mathrm{i}} , \end{aligned}$$

jossa $\gamma_M(p) = \sigma + \mathrm{i}p$, $p \in [-M, M]$, on polku joka kulkee suoraa pitkin pisteestä $\sigma - \mathrm{i}M$ pisteeseen $\sigma + \mathrm{i}M$. Saatiin siis käänteismuunnoskaava, joka pätee myös joillekin eksponentiaalisesti kasvaville funktiolle, funktiota $F(s) := \widehat{f}(-\mathrm{i}s) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-sx} f(x) \mathrm{d}x$ käyttäen.

Yhteenvetona yllä olevista tuloksista saadaan siis seuraava lause.

Lause 8.1 *Oletetaan, että $a < b$ on annettu, ja pätee*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\sigma x} |f(x)|^2 \mathrm{d}x < \infty , \quad \textit{kaikilla } a < \sigma < b . \tag{8.1}$$

*Tällöin voidaan määritellä funktion f **kaksipuolinen Laplacen muunnos** $F = \mathcal{B}f$ kompleksiluvuille s (pääarvo)integraalina*

$$F(s) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-sx} f(x) \mathrm{d}x , \qquad a < \operatorname{Re} s < b . \tag{8.2}$$

Funktion f arvot saadaan esitettyä tällöin (melkein) kaikilla $x \in \mathbb{R}$ kaavalla

$$f(x) = \int_{\sigma - \mathrm{i}\infty}^{\sigma + \mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{sx} F(s) \frac{\mathrm{d}s}{2\pi \mathrm{i}} , \tag{8.3}$$

jossa $a < \sigma < b$ ja integraalimerkintä tarkoittaa viivaintegraalia polun $\gamma(p) := \sigma + \mathrm{i}p$, $p \in \mathbb{R}$, yli.

Jos lisäksi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\sigma x} |f(x)| \mathrm{d}x < \infty , \qquad a < \sigma < b , \tag{8.4}$$

on kaksipuolinen Laplacen muunnos $F(s)$ analyyttinen funktio yllä määritellyssä alueessa, eli kun $a < \operatorname{Re} s < b$.

Huomautus 8.2

- Yllä oleva tulos pätee myös, kun $a = -\infty$ tai $b = \infty$. Erityisesti, jos f on jatkuva funktio, joka on nolla jonkin äärellisen välin ulkopuolella, pätevät oletukset (8.1) ja (8.4) kaikilla $\sigma \in \mathbb{R}$, eli tällöin voidaan käyttää tulosta valiten $a = -\infty$ ja $b = \infty$.

- Funktion f kaksipuolisesta Laplacen muunnoksesta voidaan käyttää myös merkintöjä $\mathcal{B}f$ tai $\mathcal{B}[f]$, jotka juontavat juurensa vastaavaan englanninkieliseen termiin, *bilateral Laplace transform*, ks. Wikipedia (`https://en.wikipedia.org/wiki/Two-sided_Laplace_transform`).

- Lauseessa esiintyvä ehto $a < \operatorname{Re} s < b$ vastaa luvun alun ehtoa $a < -\operatorname{Im} z < b$, sillä Laplacen muunnoksen muuttujaksi on valittu $s = -\mathrm{i}z$, jolloin $\operatorname{Re} s = -\operatorname{Im} z$.

- Lauseen molemmat oletukset toteutuvat esimerkiksi funktioille
$$g(x) := \mathbb{1}_{\{x>0\}} \mathrm{e}^{ax}\,, \quad \text{ja} \quad f(x) := \begin{cases} \mathrm{e}^{ax}\,, & \text{kun } x \geqslant 0\,, \\ \mathrm{e}^{-b|x|}\,, & \text{kun } x < 0\,. \end{cases}$$
Funktiolle g pätee $\int_{-M}^{M} \mathrm{e}^{-n\sigma x} |g(x)|^n \mathrm{d}x = \int_0^M \mathrm{e}^{n(a-\sigma)x} \mathrm{d}x$, joten molemmat integraaleista (8.1) ja (8.4) suppenevat kaikilla $\sigma > a$. Tässä tapauksessa voidaan siis valita $b = \infty$ ja käyttää määritelmän parametria a myös Lauseessa 8.1. Vastaavasti nähdään, että funktiolle f nämä integraalit suppenevat, kun $a < \sigma < b$, joten funktion määritelmän molempia parametreja voi käyttää sellaisenaan Lauseen oletuksissa.

- (MAT) Jos funktion f jatkuvuudesta ei tehdä mitään lisäoletuksia, käänteismuunnoskaava pätee samoin rajoituksin kuin L^2-avaruuden Fourier'n muunnokselle: integraali suppenee varmasti ainoastaan funktionormissa, kun se lasketaan käyttäen polkuja $\gamma_M(p) = \sigma + \mathrm{i}p$, $p \in [-M, M]$, ja lopussa otetaan $M \to \infty$. Tällöin löytyy kuitenkin aina myös jokin jono luonnollisia lukuja $M_n \to \infty$, jolla käänteiskaava toimii melkein kaikissa pisteissä x, eli $f(x)$ saadaan polkujen γ_{M_n} yli otetuista integraaleista rajalla $n \to \infty$.

8.2 Laplacen muunnos

Funktion $f(t)$, $t \geqslant 0$, Laplacen muunnos $\mathcal{L}f$ määritellään sen nollajatkeen kaksipuolisena Laplacen muunnoksena, eli $\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{B}[g](s)$, kun määritellään
$$g(x) := \begin{cases} f(x)\,, & \text{kun } x \geqslant 0\,, \\ 0\,, & \text{kun } x < 0\,. \end{cases}$$
Tästä saadaan Lauseen 8.1 avulla seuraava tulos.

Lause 8.3 *Olkoon $f(t)$, $t \geqslant 0$, annettu ja löytyy reaaliluku a, jota käyttäen seuraavat integraalit suppenevat*
$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-at} |f(t)| \mathrm{d}t\,, \quad \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2at} |f(t)|^2 \mathrm{d}t \quad < \infty\,. \tag{8.5}$$

*Tällöin voidaan määritellä funktion f **Laplacen muunnos** $F = \mathcal{L}f$ kompleksiluvuille s integraalilla*
$$F(s) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t) \mathrm{d}t\,, \qquad \operatorname{Re} s > a\,. \tag{8.6}$$
*Funktio $F(s)$ on **analyyttinen koko puolitasossa** $\operatorname{Re} s > a$, ja funktion f arvot saadaan esitettyä sen avulla (melkein) kaikilla $t \geqslant 0$ kaavalla*
$$f(t) = \int_{\sigma - \mathrm{i}\infty}^{\sigma + \mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{ts} F(s) \frac{\mathrm{d}s}{2\pi \mathrm{i}}\,, \tag{8.7}$$
jossa $\sigma > a$ ja integraali tarkoittaa pääarvoa polun $\gamma(p) := \sigma + \mathrm{i}p$, $p \in \mathbb{R}$, yli.

TODISTUS Tulos seuraa soveltamalla Lausetta 8.1 yllä määriteltyyn nollajatkeeseen g. Tällöin oletuksesta (8.5) seuraa, että integraaliehdot (8.1) ja (8.4) toteutuvat kaikilla $\sigma > a$, sillä tällöin pätee $\mathrm{e}^{-\sigma x} \leqslant \mathrm{e}^{-ax}$ kaikilla $x \geqslant 0$. Lauseessa voidaan siis valita $b = \infty$. □

Huomautus 8.4

- Koska käänteismuunnoskaava (8.3) esittää itseasiassa funktiota g, pätee sille melkein kaikilla $t \in \mathbb{R}$,
$$\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{ts} F(s) \frac{\mathrm{d}s}{2\pi\mathrm{i}} = \begin{cases} f(t)\,, & \text{kun } t \geqslant 0\,, \\ 0\,, & \text{kun } t < 0\,. \end{cases}$$

- Ei ole vahinko, että tässä on vaihdettu funktion muuttujan nimi t:ksi, sillä Laplacen muunnosta käytetään fysiikassa usein juuri *ajan* suhteen otettuna. Muistetaan, että Fourier'n muunnos tyypillisesti vaatii, että funktio häviää äärettömyydessä. Toisaalta taas fysikaalisesti mielenkiintoiset suureet ovat sellaisia, jotka lähestyvät jotain vakiota tai jäävät oskilloimaan, kun $t \to \infty$, eli niille pätee tällöin pelkästään $O(1)$. Fourier'n muunnoksen ottaminen tällaisesta funktiosta tuottaa pahoja singulariteetteja, tyypillisesti distribuutioita. Sen sijaan niin kauan, kun ollaan varmoja, että tutkittava suure säilyy eksponentiaalisesti rajoitettuna äärettömyydessä, eli jos se rajoitettu jokaisella suljetulla välillä ja $O(\mathrm{e}^{bt})$, kun $t \to \infty$, toteuttaa se Lauseen 8.3 ehdot millä tahansa vakiolla $a > b$. Näin ollen ajan suhteen otettu Laplacen muunnos onkin hyvin määritelty ja alkuperäinen funktio voidaan esittää sen käänteismuunnoskaavan avulla.

- Lisätietoja löytyy esimerkiksi Wikipediasta (`https://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_transform`).

Laplacen muunnoksen analyyttisyys on usein oleellista käänteismuunnoskaavan integraalia laskettaessa. Usein Laplacen muunnosta käytetäänkin seuraavaa algoritmia seuraamalla:

1. Etsitään (tai tiedetään esimerkiksi fysikaalisin perustein) vakio $a \in \mathbb{R}$, joka rajoittaa funktion f käytöstä äärettömässä siten, että oletukset (8.5) toteutuvat.

2. Tällöin Laplacen muunnos $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$ on määritelty ja analyyttinen, kun $\operatorname{Re} s > a$. Oletetaan, että $F(s)$ on tunnettu jollain tuon alueen välillä, esimerkiksi reaalisilla arvoilla $s > a$. Nämä arvot saadaan esimerkiksi differentiaaliyhtälöitä ratkaistaessa usein suoraan esitettyä jonain rationaalifunktiona, jonka parametrit riippuvat alkutilasta. *Tässä vaiheessa on hyvä huomata, esimerkiksi muuttujanvaihtoja varten, että voi huoletta olettaa parametrin s olevan positiivinen.*

3. Etsitään saadun funktion F analyyttinen jatke mahdollisimman suureen kompleksitason alueeseen Ω. Yllä olevan perusteella tiedetään, että Ω sisältää ainakin kaikki arvot s, joille $\operatorname{Re} s > a$, mutta se voi olla myös huomattavasti suurempi. Esimerkiksi, jos F on rationaalifunktio, voi alueeksi Ω valita koko kompleksitason, josta on poistettu funktion F nimittäjän nollakohdat.

4. Lähdetään liikkeelle käänteismuunnoskaavasta käyttäen polkua $\gamma_M(p) = \sigma - \mathrm{i}p$, jossa $\sigma > a$, $M \gg 1$, ja $p \in [-M, M]$. Pyritään siirtämään polku mahdollisimman kauas vasemmalle Cauchyn lausetta tai residylausetta käyttäen. Tämän voi tehdä esimerkiksi neliön muotoisia suljettuja polkuja käyttäen, jotka kulkevat janoja pitkin seuraavien pisteiden kautta: $\sigma - \mathrm{i}M \to \sigma + \mathrm{i}M \to \sigma' + \mathrm{i}M \to \sigma' - \mathrm{i}M \to \sigma - \mathrm{i}M$, jossa $\sigma' < \sigma$. *Tässä vaiheessa kannattaa käyttää koko analyyttisyysaluetta* Ω, eikä pelkästään alkuperäistä F:n määrittelyaluetta $\operatorname{Re} s > a$.

5. Polun siirtämistä vasemmalle motivoi seuraava käänteismuunnoskaavan integrandin ominaisuus: koska $|\mathrm{e}^{ts}| = \mathrm{e}^{t \operatorname{Re} s} = \mathrm{e}^{t\sigma}$, tulee integraalista arvoilla $\sigma < 0$ rajan $M \to \infty$ jälkeenkin tyypillisesti termi, joka häviää eksponentiaalisesti, kun $t \to \infty$. Jos tässä voi ottaa rajan $\sigma \to -\infty$, häviää termi kokonaan, ja käänteismuunnoksen voi laskea suoraan residylausetta soveltamalla.

Esimerkki 8.5 Lasketaan Laplacen muunnos $\mathcal{L}f$, kun $f(t) = \mathrm{e}^{ct}$ ja $c \in \mathbb{C}$ on annettu. Tutkitaan myös sen käänteismuunnoskaavan suppenemista.

Ratkaisu: Kun $s, w \in \mathbb{C}$ ja $n = 1, 2$, pätee

$$\int_0^M \mathrm{e}^{-nst}\mathrm{e}^{nwt}\mathrm{d}t = \int_0^M \mathrm{e}^{n(w-s)t}\mathrm{d}t = \Big/_0^M \frac{1}{n(w-s)}\mathrm{e}^{n(w-s)t} = \frac{1}{n(s-w)}\left(1 - \mathrm{e}^{(w-s)nM}\right),$$

joten integraali suppenee, kun $M \to \infty$, jos ja vain jos $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} w$. Koska $|f(t)| = \mathrm{e}^{t\operatorname{Re} c}$, seuraa tästä, että ehdot (8.5) toteutuvat, jos valitaan jokin $a > \operatorname{Re} c$. Olkoon siis $a = \operatorname{Re} c + \varepsilon$, jollakin $\varepsilon > 0$.

Kun nyt $\operatorname{Re} s > a$, saadaan yllä olevasta laskusta sijoittamalla $n = 1$ ja $w = c$ Laplacen muunnoksen $F = \mathcal{L}f$ arvoksi

$$F(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{e}^{ct}\mathrm{d}t = \frac{1}{s-c}.$$

F on siis rationaalifunktio, jolla on tasan yksi erikoispiste kompleksitasossa, ensimmäisen kertaluvun napa pisteessä $s = c$. Voidaan siis valita $\Omega = \mathbb{C}\backslash\{c\}$.

Käänteismuunnosta varten valitaan tämän jälkeen jokin $\sigma > a$, jolloin $\sigma > \operatorname{Re} c$. Tavoitteena on laskea raja-arvo $I(t) := \lim_{M\to\infty} I_M(t)$, kun $t \in \mathbb{R}$ ja

$$I_M(t) := \int_{\sigma-\mathrm{i}M}^{\sigma+\mathrm{i}M} \mathrm{e}^{ts}F(s)\frac{\mathrm{d}s}{2\pi\mathrm{i}} = \int_{\sigma-\mathrm{i}M}^{\sigma+\mathrm{i}M} \mathrm{e}^{ts}\frac{1}{s-c}\frac{\mathrm{d}s}{2\pi\mathrm{i}}.$$

Tässä käytetään siis viivaintegraalia polun $\gamma_1 := \gamma_{\sigma-\mathrm{i}M\to\sigma+\mathrm{i}M}$ yli.

Oletetaan ensin, että $t > 0$. Täydennetään tällöin γ_1 suljetuksi polun lisäämällä siihen polku $\gamma_2(\phi) := \sigma + \mathrm{i}M\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, $\phi \in [0, \pi]$. Tällöin $\gamma := \gamma_1 \dot{+} \gamma_2$ on selvästi suljettu polku, ja kaikilla tarpeeksi suurilla M, se sisältyy kokonaan analyyttisyysalueeseen Ω ja kiertää kerran navan $s = c$ ympäri positiiviseen kiertosuuntaan (ks. Kuva 8.1). Näin ollen residylauseesta saadaan kaikille tarpeeksi suurille M arvoksi

$$\int_\gamma \mathrm{e}^{ts}\frac{1}{s-c}\frac{\mathrm{d}s}{2\pi\mathrm{i}} = \operatorname{Res}\left(\mathrm{e}^{ts}\frac{1}{s-c}, s = c\right) = \lim_{s\to c}\left[(s-c)\mathrm{e}^{ts}\frac{1}{s-c}\right] = \lim_{s\to c}\mathrm{e}^{ts} = \mathrm{e}^{tc}.$$

Toisaalta

$$\int_\gamma \mathrm{e}^{ts}\frac{1}{s-c}\frac{\mathrm{d}s}{2\pi\mathrm{i}} = I_M(t) + \int_{\gamma_2} \mathrm{e}^{ts}\frac{1}{s-c}\frac{\mathrm{d}s}{2\pi\mathrm{i}}.$$

Tehdään integraaliin polun γ_2 yli "muuttajanvaihto“ $z = -\mathrm{i}(s-\sigma)$, jonka näkee toimivan juuri niin kuin odottaisikin kirjoittamalla auki molempien käyräintegraalien parametrisoinnit:

$$\int_{\gamma_2} \mathrm{e}^{ts}\frac{1}{s-c}\frac{\mathrm{d}s}{2\pi\mathrm{i}} = \int_0^\pi \mathrm{e}^{t\left(\sigma+\mathrm{i}M\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\right)}\frac{1}{\sigma+\mathrm{i}M\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}-c}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\mathrm{i}M\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\mathrm{i}\mathrm{d}\phi = \int_{\gamma_M^{\curvearrowleft}} \mathrm{e}^{t(\sigma+\mathrm{i}z)}\frac{1}{\sigma+\mathrm{i}z-c}\frac{\mathrm{d}z}{2\pi}.$$

Jäljelle jää viivaintegraali ylätason ympyränkaaren yli, eli käyrää $\gamma_M^{\curvearrowleft}(\phi) = M\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, $\phi \in [0, \pi]$, pitkin. Koska $t > 0$, voidaan tähän soveltaa suoraan Jordanin lemmaa, sillä kun $z = M\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, on kolmioepäyhtälön perusteella

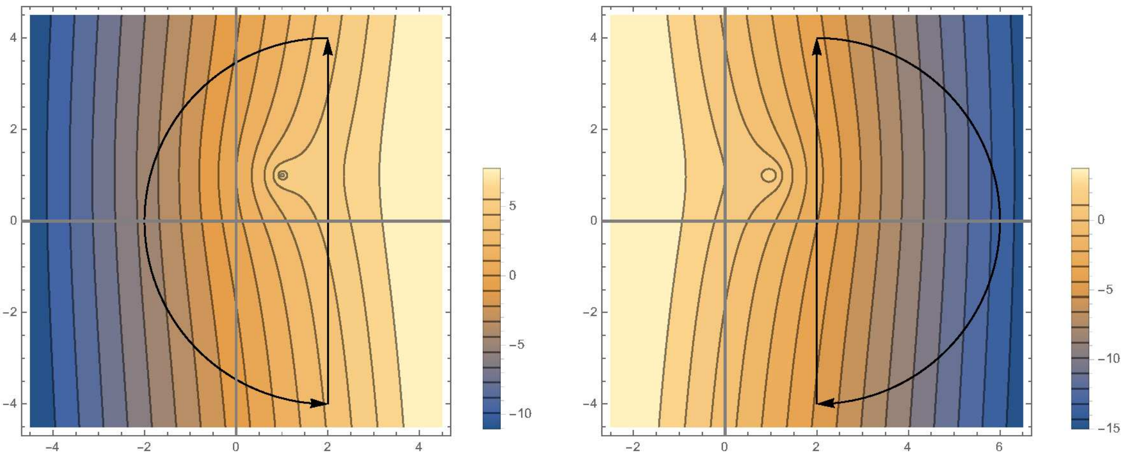
$$\left|\frac{1}{\mathrm{i}z+\sigma-c}\right| = \frac{1}{|\mathrm{i}z+\sigma-c|} \leqslant \frac{1}{||\mathrm{i}z|-|\sigma-c||} = \frac{1}{|M-|\sigma-c||} \xrightarrow{M\to\infty} 0.$$

Näin ollen Lauseen 3.26 mukaan

$$\lim_{M\to\infty}\int_{\gamma_2} \mathrm{e}^{ts}\frac{1}{s-c}\frac{\mathrm{d}s}{2\pi\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{t\sigma}}{2\pi}\lim_{M\to\infty}\int_{\gamma_M^{\curvearrowleft}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tz}}{\sigma+\mathrm{i}z-c}\mathrm{d}z = 0,$$

joten ollaan todistettu, että

$$\lim_{M\to\infty} I_M(t) = \mathrm{e}^{tc}, \qquad \text{kun } t > 0.$$



Kuva 8.1: Esimerkin 8.5 integrointipolut, sekä niiden sijainti napapisteeseen c nähden. Kuvat on piirretty parametreilla $c = 1 + \mathrm{i}$, $M = 4$ ja $\sigma = 2$, jolloin $\sigma > 1 = \operatorname{Re} c$, ja taustalla on integrandin modulin logaritmin korkeuskäyräkuvaaja. (*Vasen kuva*) $t = 2 > 0$ ja vastaava integrointipolku $\gamma_1 \dot{+} \gamma_2$. (*Oikea kuva*) $t = -2 < 0$ ja vastaava integrointipolku $\gamma_1 \dot{+} \overleftarrow{\gamma_3}$

Kun $t < 0$, voidaan edetä kuten edellä, paitsi nyt Jordanin lemmaa varten täytyy suljetuksi poluksi valita $\gamma := \gamma_1 \dot{+} \overleftarrow{\gamma_3}$, eli lisätä käyrän $\gamma_3(\phi) := \sigma - \mathrm{i}M\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, $\phi \in [0, \pi]$, käänteispolku. Tämä vastaa alkuperäisen integrointipolun oikealla puolella kulkevaa ympyränkaarta (onhan $\operatorname{Re} \gamma_3(\phi) = \sigma + M \sin\phi \geqslant \sigma$), joten sen sisään ei jää yhtään erikoispistettä. Residylauseen ja Jordanin lemma perusteella (käytetään nyt muuttujanvaihtoa $z = \mathrm{i}(s - \sigma)$) saadaan tällöin

$$\lim_{M\to\infty} I_M(t) = 0\,, \qquad \text{kun } t < 0\,.$$

Tutkitaan vielä myös arvo $t = 0$ huolellisesti. Koska $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,\overline{\ln}(s - c) = \frac{1}{s-c}$, saadaan

$$\begin{aligned}
I_M(0) &= \int_{\sigma-\mathrm{i}M}^{\sigma+\mathrm{i}M} \frac{1}{s-c}\frac{\mathrm{d}s}{2\pi\mathrm{i}} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \Big/_{\sigma-\mathrm{i}M}^{\sigma+\mathrm{i}M} \overline{\ln}(s-c) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\overline{\ln}(\sigma - c + \mathrm{i}M) - \overline{\ln}(\sigma - c - \mathrm{i}M)\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\ln|\sigma - c + \mathrm{i}M| - \ln|\sigma - c - \mathrm{i}M| + \mathrm{i}\left[\operatorname{Arg}(\sigma - c + \mathrm{i}M) - \operatorname{Arg}(\sigma - c - \mathrm{i}M)\right]\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\ln\left|\frac{\sigma - c + \mathrm{i}M}{\sigma - c - \mathrm{i}M}\right| + \mathrm{i}\left[\operatorname{Arg}\left(\frac{\sigma - c}{M} + \mathrm{i}\right) - \operatorname{Arg}\left(\frac{\sigma - c}{M} - \mathrm{i}\right)\right]\right)\,. \\
&\xrightarrow{M\to\infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\ln 1 + \mathrm{i}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]\right) = \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Yhteenvetona käänteismuunnoskaavasta ollaan yllä laskettu pisteittäiset arvot, jotka pätevät aina, kun $\sigma > \operatorname{Re} c$,

$$\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{ts}\frac{1}{s-c}\frac{\mathrm{d}s}{2\pi\mathrm{i}} = \begin{cases} \mathrm{e}^{ct}\,, & \text{kun } t > 0\,, \\ \frac{1}{2}\,, & \text{kun } t = 0\,, \\ 0\,, & \text{kun } t < 0\,. \end{cases}$$

Tulos oli siis odotettu nollajatkeen käänteismuunnos. Huomataan, että jopa arvolla $t = 0$ kaikki meni edellä kerrotun mukaisesti, sillä saatu integraalin arvo on keskiarvo nollajatkeen vasemmasta raja-arvosta, joka on 0, ja sen oikeasta raja-arvosta, joka on $\mathrm{e}^0 = 1$.

Huomautus 8.6 Yllä on siis laskettu sekä vakiofunktion ($c = 0$), että eksponenttifunktioiden

Laplacen muunnokset,

$$\boxed{\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s}\,, \quad \text{ja} \quad \mathcal{L}[\mathrm{e}^{ct}](s) = \frac{1}{s-c}\,, \quad c \in \mathbb{C}}\,.$$

Lisäksi nähtiin, että käänteismuunnoskaava piti niille paikkaansa pisteittäin, kun $t > 0$.

Esimerkki 8.7 Millä $c \in \mathbb{C}$ potenssifunktion $f(t) = t^c$, $t > 0$, Laplacen muunnos suppenee itseisesti ja minkä funktion se tällöin tuottaa?

Ratkaisu: Tässä siis $t^c = \exp(c \ln t)$, $t > 0$, joten $|f(t)| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\, c \ln t} = t^{\mathrm{Re}\, c}$. Näin ollen $\int_0^\infty |f(t)| \mathrm{e}^{-at} \mathrm{d}t < \infty$ tasan silloin, kun $a > 0$ (vaaditaan suppenemiseen suurilla t) ja $\mathrm{Re}\, c > -1$ (vaaditaan suppenemiseen kun $t \approx 0$). Oletetaan siis, että $\mathrm{Re}\, c > -1$ ja valitaan jokin $a > 0$.

Laplacen muunnoksen $F = \mathcal{L}[f]$ laskemiseksi oletetaan ensin, että $\mathrm{Re}\, c > -1$, s on reaalinen, ja $s > a > 0$. Tällöin voidaan tehdä reaalinen muuttujanvaihto $r = st$, jolle pätee normaalien logaritmin laskusääntöjen mukaan $\ln t = \ln(r/s) = \ln r - \ln s$. Näin saadaan

$$F(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} t^c \mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-r} \mathrm{e}^{c(\ln r - \ln s)} \frac{\mathrm{d}r}{s} = s^{-(c+1)} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-r} r^{c+1-1} \mathrm{d}r = \Gamma(c+1) s^{-(c+1)}\,,$$

jossa ollaan käytetty Γ-funktion määritelmää argumentille, jolla $\mathrm{Re}\,(c+1) > 0$. Tämän funktion analyyttinen jatke alueeseen $\mathrm{Re}\, s > a$ saadaan logaritmin päähaaraa käyttäen,

$$F(s) = \Gamma(c+1) \exp(-(c+1)\, \overline{\ln}\, s)\,,$$

ja itse asiassa näin saadaan analyyttinen jatke koko alueeseen $\Omega := \mathbb{C} \backslash]-\infty, 0]$. Huomataan, että tässä $F(s) = \Gamma(c+1) s^{-(c+1)}$, kun verrataan jatketta yleisen kompleksipotenssin määritelmään.

Vastaus: Kun $\mathrm{Re}\, c > -1$,

$$\boxed{\mathcal{L}[t^c](s) = \Gamma(c+1) s^{-(c+1)}}\,.$$

Itse asiassa käänteismuunnoksen integraalin L^2-suppeneminen vaatisi vähän vahvemman ehdon $\mathrm{Re}\, c > -\frac{1}{2}$, joka tarvitaan toiseen Lauseen 8.3 ehdoista, eli jotta $\int_0^\infty |t^c|^2 \mathrm{e}^{-2at} \mathrm{d}t < \infty$. Tässä tapauksessa käy kuitenkin niin, että käänteismuunnos toimii pääarvointegraalina tulkittuna myös arvoilla $-1 < \mathrm{Re}\, c \leqslant -\frac{1}{2}$. [1]

8.2.1 Laplacen muunnoksen perusominaisuuksia

Laplacen muunnos on lineaarinen

Seuraava tulos nähdään suoraan integraalien perusominaisuuksia käyttäen.

Lause 8.8 *Jos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ja $f(t)$, $g(t)$, $t \geqslant 0$, toteuttavat Lauseen 8.3 ehdot, myös niiden lineaarikombinaatio $\alpha f + \beta g$ toteutta ne ja näiden funktioiden Laplacen muunnokselle pätee $\mathcal{L}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{L}[f] + \beta \mathcal{L}[g]$.*

Laplacen muunnoksen laskemista voi joskus helpottaa esittämällä alkuperäinen funktio summana, jossa ainakin osalla termeistä on tunnettu Laplacen muunnos. Esimerkiksi seuraavassa laskussa pystytään näin suoraan käyttämään edellä johdettuja eksponenttifunktion tunnettuja muunnoksia.

Esimerkki 8.9 Mikä on funktion $f(t) = \sin(\omega t)$, $\omega \in \mathbb{C}$, Laplacen muunnos?
Ratkaisu: Koska $f(t) = \frac{1}{2\mathrm{i}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \frac{1}{2\mathrm{i}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ saadaan lineaarisuuden ja Esimerkin 8.5 avulla

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f](s) &= \frac{1}{2\mathrm{i}} \mathcal{L}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}](s) - \frac{1}{2\mathrm{i}} \mathcal{L}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}](s) = \frac{1}{2\mathrm{i}} \frac{1}{s - \mathrm{i}\omega} - \frac{1}{2\mathrm{i}} \frac{1}{s + \mathrm{i}\omega} \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}} \left(\frac{1}{s - \mathrm{i}\omega} - \frac{1}{s + \mathrm{i}\omega} \right) = \frac{1}{2\mathrm{i}} \frac{2\mathrm{i}\omega}{(s - \mathrm{i}\omega)(s + \mathrm{i}\omega)} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\,. \end{aligned}$$

[1] (MAT) On olemassa funktioita, joka eivät ole L^2-integroituvia, mutta joille silti Fourier'n käänteismuunnos ja siten myös Laplacen käänteismuunnos, toimii pisteittäin. Ks. Wikipedia URL `https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_transform#Laplace_transform` ja sen Laplacen muunnos -kohdan viitteitä.

Huomautus 8.10 Vastaavanlaisella laskulla voi laskea myös kosinin Laplacen muunnoksen; näistä saadaan

$$\boxed{\mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad \text{ja} \quad \mathcal{L}[\cos(\omega t)](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}}. \tag{8.8}$$

Huomataan, että eksponenttifunktion ja kosinin muunnokset ovat $O(|s|^{-1})$, kun $s \to \infty$, eivätkä ne ole itseisesti integroituva. Sen sijaan sinin muunnos on $O(|s|^{-2})$, kun $s \to \infty$, joka taas tarkoittaa sitä, että se on itseisesti integroituva. Tämä ero selittyy sillä, että $\sin(\omega t) \to 0$, kun $t \to 0$, joten sen nollajatke on jatkuva, päinvastoin kuin kosinin ja eksponenttifunktioiden jatkeet.

Derivaatan Laplacen muunnos

Derivaatan Fourier'n muunnos oli yksinkertainen, katsotaan seuraavaksi miten käy Laplacen muunnoksen tapauksessa. Oletetaan siis, että funktio f on derivoituva jokaisella $t > 0$, ja sen derivaatta f' toteuttaa Lauseen 8.3 ehdot. Olkoon $\operatorname{Re} s > a$, jolloin voidaan osittaisintegroida seuraavaa Laplacen muunnosta kohti rajalla $\varepsilon \to 0^+$ konvergoivaa integraalia

$$\int_\varepsilon^\infty e^{-st} f'(t)\mathrm{d}t = \Big/_{\!\!\varepsilon}^{\infty} e^{-st} f(t) - \int_\varepsilon^\infty (-s)e^{-st} f(t)\mathrm{d}t = -e^{-\varepsilon s} f(\varepsilon) + s\int_\varepsilon^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t\,,$$

sillä ylärajan sijoitustermi häviää.[2] Ottamalla tässä raja $\varepsilon \to 0^+$, saadaan siis tulos

$$\boxed{\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0^+)}\,,$$

joka pätee, jos $f'(t)$ löytyy jokaisessa pisteessä $t > 0$ ja saatu funktio toteuttaa Lauseen 8.3 ehdot.

Huomautus 8.11

- Tässä on korostettu merkinnällä $f(0^+)$ sitä, että tähän otetaan funktiosta f saatu raja-arvo, eikä esimerkiksi sen käänteismuunnoksen tai nollajatkeen arvoa origossa.
- Jos $f(0) = 0$, pätee Fourier'n muunnosta (7.12) muistuttava yksinkertaisempi tulos $\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s)$.
- Laplacen muunnos on siis erityisen kätevä käyttää, jos pitää ratkaista differentiaaliyhtälöitä pitäen funktion arvo origossa kiinnitettynä, eli esimerkiksi Diriclet'n reunaehdoilla.

Laplacen muunnoksen derivaatta

Oletetaan, että f toteuttaa Lauseen 8.3 ehdot. Kuten Lauseen todistuksessa nähtiin, tällöin sen Laplacen muunnos $F = \mathcal{L}[f]$ saadaan integraalista, joka toteuttaa Lauseen 5.4 ehdot, ja siten sillä on derivaatta analyyttisyysalueessa $\operatorname{Re} s > a$, jonka voi laskea integrandia derivoimalla. Tästä seuraa

$$F'(s) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} e^{-st} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty (-t)e^{-st} f(t)\mathrm{d}t = \mathcal{L}[-tf(t)](s)\,,$$

ja yleisestikin k kertaa derivoimalla saadaan

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[(-t)^k f(t)](s)}\,.$$

[2](MAT) Oletuksista seuraa, että analyysin peruslausetta voi käyttää derivaatan integroinnissa, eli kaikilla $x \geqslant 0$ pätee $\int_\varepsilon^x f'(t)\mathrm{d}t = f(x) - f(\varepsilon)$ (ks. [3, Lause 7.21]). Tästä seuraa yläraja $|f(x)| \leqslant |f(\varepsilon)| + \int_\varepsilon^x e^{at}e^{-at}|f'(t)|\mathrm{d}t \leqslant |f(\varepsilon)| + Ce^{ax}$, eli $f(x) = O(e^{ax})$, kun $x \to \infty$. Näin ollen, jos $\operatorname{Re} s > a$, pätee $\lim_{t\to\infty} e^{-st} f(t) = 0$.

Esimerkki 8.12 Mikä on funktion $f(t) = t^n \mathrm{e}^{ct}$, $c \in \mathbb{C}$ ja $n \in \mathbb{N}$, Laplacen muunnos?
Ratkaisu: Esimerkin 8.5 mukaan on $\mathcal{L}[\mathrm{e}^{ct}](s) = \frac{1}{s-c}$. Tämän derivaatta on siis $-\frac{1}{(s-c)^2} = \mathcal{L}[(-t)\mathrm{e}^{ct}](s)$, ja n kertaa iteroimalla saadaan

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\mathcal{L}[\mathrm{e}^{ct}](s) = (-1)^n \frac{n!}{(s-c)^{n+1}} = \mathcal{L}[(-t)^n \mathrm{e}^{ct}](s)\,.$$

Näin ollen saadaan vastaukseksi lineaarisuutta käyttäen

$$\mathcal{L}[t^n \mathrm{e}^{ct}](s) = \frac{n!}{(s-c)^{n+1}}\,.$$

Kun $c = 0$, saadaan $\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$, aivan kuten myös Esimerkistä 8.7 seuraa.

Integraalifunktion Laplacen muunnos

Oletetaan, että f toteuttaa Lauseen 8.3 ehdot ja muutenkin riittävän säännöllinen, esimerkiksi jatkuva. Tällöin myös sen integraalifunktiolle

$$g(t) := \int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\,,$$

saadaan laskettua Laplacen muunnos funktion f muunnoksen avulla. Koska tällöin $g'(t) = f(t)$ kaikilla $t > 0$, seuraa tästä, että g toteuttaa edellisen kohdan derivaatoille mainitut ehdot, ja siten

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[g'](s) = s\mathcal{L}[g](s) - g(0^+) = s\mathcal{L}[g](s)\,.$$

Näin ollen saadaan kaava

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s)}\,.$$

Laplacen muunnoksen integrointi

Oletetaan, että funktio f toteuttaa Lauseen 8.3 ehdot ja merkitään $F = \mathcal{L}[f]$. Oletetaan, että G **on jokin Laplacen muunnoksen F integraalifunktio**, eli oletetaan, että $G(s)$ on analyyttinen alueessa $\operatorname{Re} s > a$ ja $G'(s) = F(s)$ kaikissa tämän alueen pisteissä. Jos tällöin s_1 ja s_2 ovat kaksi tämän alueen pistettä, kuuluu ne yhdistävä polku $\gamma_{s_1 \to s_2}$ myös kokonaan tähän alueeseen, joten sille pätee lauseen 1.32 mukaan

$$G(s_2) - G(s_1) = \int_{\gamma_{s_1 \to s_2}} G'(s)\mathrm{d}s = \int_{\gamma_{s_1 \to s_2}} F(s)\mathrm{d}s = \int_0^1 F(s_1 + \tau(s_2 - s_1))\,(s_2 - s_1)\mathrm{d}\tau\,.$$

Sijoittamalla tähän Laplacen muunnoksen määritelmä ja käyttämällä Fubinin lausetta saadaan

$$\begin{aligned}
G(s_2) - G(s_1) &= (s_2 - s_1)\int_0^1 \mathrm{d}\tau \int_0^\infty \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-[s_1 + \tau(s_2 - s_1)]t} f(t) \\
&= \int_0^\infty \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-s_1 t} f(t) \int_0^1 \mathrm{d}\tau\, (s_2 - s_1)\mathrm{e}^{-\tau(s_2 - s_1)t} = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-s_1 t} f(t) \frac{1}{-t} \Big/_0^1 \mathrm{e}^{-\tau(s_2 - s_1)t} \\
&= \int_0^\infty \mathrm{d}t f(t)\frac{1}{t}\left(\mathrm{e}^{-s_1 t} - \mathrm{e}^{-s_2 t}\right)\,.
\end{aligned}$$

Tästä laskusta saadaan suoraan seuraavat kaksi tulosta.

1. Jos $\operatorname{Re} \alpha \geqslant 0$ ja $\operatorname{Re} s > a$ pätee

$$G(s + \alpha) - G(s) = \mathcal{L}[f(t)t^{-1}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t})](s)\,.$$

2. Jos funktio f toteuttaa Lauseen 8.3 ehdot ja lisäksi funktio $f(t)/t$ on itseisesti integroituva välillä $[0,1]$, sen Laplacen muunnoksen määrittelevä integraali $H(s) := \mathcal{L}[t^{-1}f(t)](s)$ suppenee itseisesti kaikilla $\mathrm{Re}\, s > a$, ja se saadaan integraalifunktion G avulla vakiota vaille kaavasta
$$H(s) = C - G(s)\,.$$
Vakio C voidaan myös laskea reaaliakselia pitkin otettuna raja-arvona, $C = \lim_{s\to\infty} G(s)$. Lisäksi voidaan tässä tapauksessa ratkaista Laplacen muunnos H myös käyttäen sen analyyttista jatketta reaalisilta arvoilta $r > a$, jotka toteuttavat
$$H(r) = \int_r^\infty F(s)\mathrm{d}s\,. \tag{8.9}$$

TODISTUS (MAT) Kohta 1 seuraa suoraan sijoituksella $s_2 = s + \alpha$ ja $s_1 = s$, kun huomataan, että tässä $\mathrm{Re}\, s_2 = \mathrm{Re}\, s + \mathrm{Re}\,\alpha > a$. Kohtaa 2 varten huomataan ensin, että arvoilla $t \geqslant 1$ voidaan arvioida $|\mathrm{e}^{-st}f(t)t^{-1}| \leqslant \mathrm{e}^{-\mathrm{Re}\, st}|f(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-at}|f(t)|$, ja toisaalta kun $0 < t < 1$, on $|\mathrm{e}^{-st}f(t)t^{-1}| \leqslant \mathrm{e}^{|a|}|f(t)t^{-1}|$, joten molemmat integraalit ovat itseisesti suppenevia. Lisäksi nämä ylärajat antavat käyttää Lebesguen dominoidun konvergenssin lausetta, kun $s \to \infty$, joten $H(s) \to 0$ tällä rajalla. Yllä johdetusta kaavasta seuraa nyt, että $G(R) - G(s) = H(s) - H(R)$ aina, kun $R, \mathrm{Re}\, s > a$. Voidaan siis määritellä $C = H(a+1) + G(a+1)$, ja tällöin pätee $H(s) = C - G(s)$ kaikille $\mathrm{Re}\, s > a$. Lisäksi saadaan tästä myös tulos $G(R) = C - H(R) \to C$, kun $R \to \infty$. Jos $r > a$, pätee $H(r) - H(R) = G(R) - G(r) = \int_r^R F(s)\mathrm{d}s$, joten ottamalla raja $R \to \infty$ saadaan myös kaava (8.9). □

Esimerkki 8.13 Esimerkin 8.5 mukaan on funktion $f(t) = \mathrm{e}^{ct}$, $c \in \mathbb{C}$, Laplacen muunnos $F(s) = \mathcal{L}[\mathrm{e}^{ct}](s) = \frac{1}{s-c}$. Tämän eräs integraalifunktio saadaan logaritmin päähaaraa käyttäen määrittelemällä $G(s) = \overline{\ln}(s-c)$, sillä tämä funktio on analyyttinen arvoilla $\mathrm{Re}\,(s-c) > 0$, jossa sen derivaatta on juuri $1/(s-c)$. Kohtaa yksi soveltamalla saadaan siis kaikille α, joille $\mathrm{Re}\,\alpha \geqslant 0$, Laplacen muunnos
$$\overline{\ln}(s+\alpha-c) - \overline{\ln}(s-c) = \mathcal{L}[\mathrm{e}^{ct}t^{-1}(1-\mathrm{e}^{-\alpha t})](s) = \mathcal{L}[t^{-1}(\mathrm{e}^{ct} - \mathrm{e}^{(c-\alpha)t})](s)\,.$$
Erityisesti, kun valitaan reaaliset eksponentit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, joille $c_1 > c_2$, voidaan tähän kaavaan sijoittaa $c = c_1$, $\alpha = c_1 - c_2$, josta seuraa kaikille reaalisille $s > c_1$
$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{e}^{c_1 t} - \mathrm{e}^{c_2 t}}{t}\right](s) = \overline{\ln}(s + c_1 - c_2 - c_1) - \overline{\ln}(s - c_1) = \ln(s - c_2) - \ln(s - c_1) = \ln\frac{s - c_2}{s - c_1}\,.$$
Jos tässä olisi $c_1 < c_2$, voidaan käyttää lineaarisuutta, jonka avulla kaikille $s > c_2$ saadaan
$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{e}^{c_1 t} - \mathrm{e}^{c_2 t}}{t}\right](s) = -\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{e}^{c_2 t} - \mathrm{e}^{c_1 t}}{t}\right](s) = -\ln\frac{s - c_1}{s - c_2} = \ln\frac{s - c_2}{s - c_1}\,.$$
Näin ollen analyyttisen jatkeen avulla saadaan kaava, joka pätee kaikille reaalisille c_1, c_2 ja kompleksiarvoille s, joille $\mathrm{Re}\, s > c_1, c_2$,
$$\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{e}^{c_1 t} - \mathrm{e}^{c_2 t}}{t}\right](s) = \overline{\ln}\,\frac{s - c_2}{s - c_1}}\,.$$

8.2.2 ”Viivästyneen” funktion Laplacen muunnos

Mitä tapahtuu Laplacen muunnokselle, jos annettua funktiota $f(t)$, $t \geqslant 0$, siirretään alkamaan hetkellä $t = \tau > 0$? Tarkemmin, tässä siirretään funktion f nollajatketta, eli määritellään
$$g(t) := \begin{cases} f(t-\tau)\,, & \text{kun } t \geqslant \tau\,, \\ 0\,, & \text{kun } t < \tau\,. \end{cases}$$

Toisin sanoen $g(t) := f(t-\tau)\mathbb{1}_{\{t\geqslant\tau\}}$, kun $t \geqslant 0$. Oletetaan, että f toteuttaa Lauseen 8.3 ehdot ja $\mathrm{Re}\, s > a$. Tällöin

$$\mathcal{L}[g](s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} g(t)\mathrm{d}t = \int_\tau^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t-\tau)\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s(u+\tau)} f(u)\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-\tau s}\mathcal{L}[f](s)\,.$$

(Samanlainen lasku näyttää, että tässä tapauksessa myös g toteuttaa Lauseen ehdot ilman, että a:n arvoa tarvitsee vaihtaa.) Toisin sanoen funktion ”viivästyttäminen” liittyy eksponenttifunktiolla kertomiseen Laplacen muunnoksessa:

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t-\tau)\mathbb{1}_{\{t\geqslant\tau\}}](s) = \mathrm{e}^{-\tau s}\mathcal{L}[f](s) \quad \tau \geqslant 0\,.}$$

Vastaavasti alkuperäisen funktion kertominen eksponenttifunktiolla vastaa Laplacen muunnoksen argumentin siirtoa: Jos c on kompleksiluku ja $\mathrm{Re}\, s > a + \mathrm{Re}\, c$, on myös $\mathrm{Re}\,(s-c) > a$, joten

$$\mathcal{L}[f](s-c) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s-c)t} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{e}^{ct} f(t)\mathrm{d}t = \mathcal{L}[\mathrm{e}^{ct} f(t)](s)\,. \tag{8.10}$$

Esimerkki 8.14 Tarkastellaan ”portaikkofunktiota”, jonka askelen ”leveys” on $\tau > 0$ ja ”korkeus” $A > 0$, eli funktiota

$$f(t) := \begin{cases} A\,, & \text{kun } 0 \leqslant t < \tau\,, \\ A + A\,, & \text{kun } \tau \leqslant t < 2\tau\,, \\ A + A + A\,, & \text{kun } 2\tau \leqslant t < 3\tau\,, \\ \ldots & \ldots \end{cases} = A\mathbb{1}_{\{t\geqslant 0\}} + A\mathbb{1}_{\{t\geqslant\tau\}} + A\mathbb{1}_{\{t\geqslant 2\tau\}} + \cdots$$

Tämä funktio voidaan kirjoittaa yksinkertaisemmin sarjana

$$f(t) = A\sum_{n=0}^\infty \mathbb{1}_{\{t\geqslant n\tau\}}\,.$$

Jos tässä $t \geqslant 0$ ja $m = \lfloor t/\tau \rfloor$ on luvun t/τ kokonaislukuosa, on $t/\tau < m+1$, joten $\mathbb{1}_{\{t\geqslant n\tau\}} = 0$ kaikilla $n > m$. Näin ollen on yllä olevassa sarjassa jokaisessa pisteessä ainoastaan äärellinen määrä nollasta poikkeavia termejä, joten se triviaalisti suppenee itseisesti kaikissa pisteessä ja pätee $|f(t)| \leqslant A\sum_{n=0}^m 1 = A(m+1) \leqslant A(t/\tau + 1)$. Näin ollen $|f(t)|$ on lineaarisesti rajoitettu, ja se toteuttaa Lauseen 8.3 ehdot, kun valitaan jokin $a > 0$.

Tällöin voidaan myös sen Laplacen muunnosta laskiessa vaihtaa integroinnin ja summauksen järjestystä, josta saadaan, kun $\mathrm{Re}\, s > 0$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f](s) &= \int_0^\infty \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-st} A\sum_{n=0}^\infty \mathbb{1}_{\{t\geqslant n\tau\}} = A\sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-st}\mathbb{1}_{\{t\geqslant n\tau\}} = A\sum_{n=0}^\infty \int_{n\tau}^\infty \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-st} \\ &= A\sum_{n=0}^\infty \Big/_{n\tau}^{\infty} \frac{1}{-s}\mathrm{e}^{-st} = \frac{A}{s}\sum_{n=0}^\infty \mathrm{e}^{-sn\tau} = \frac{A}{s}\sum_{n=0}^\infty (\mathrm{e}^{-s\tau})^n\,.\end{aligned}$$

Viimeisessä summassa on $|\mathrm{e}^{-s\tau}| = \mathrm{e}^{-\tau \mathrm{Re}\, s} < 1$, sillä $\mathrm{Re}\, s, \tau > 0$. Näin ollen voidaan käyttää geometrisen sarjan summakaavaa, ja päädytään lopputulokseen

$$\boxed{\mathcal{L}\left[A\sum_{n=0}^\infty \mathbb{1}_{\{t\geqslant n\tau\}}\right](s) = \frac{A}{s}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-s\tau}}\,, \qquad \tau > 0\,.}$$

8.2.3 Konvoluutio ja Laplacen muunnos

Koska (kaksipuolinen) Laplacen muunnos oli läheistä sukua Fourier'n muunnokselle, ei ehkä tule yllätyksenä, että myös sopivaa muotoa olevilla konvoluutioilla on yksikertainen Laplacen muunnos. Tätä varten on kuitenkin käytettävä kaksipuoliseen muunnokseen sijoitettavia funktioita, eli juuri "nollajatkeita".

Oletetaan siis, että $f_1(t), f_2(t)$, $t \geqslant 0$, on annettu ja merkitään niiden nollajatkeita $g_i(x) := \mathbb{1}_{\{x\geqslant 0\}} f_i(x)$, $i = 1, 2$. Tällöin näiden konvoluution arvo pisteessä $t > 0$ on

$$(g_1 * g_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t-x)g_2(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-x)f_2(x)\mathbb{1}_{\{x\leqslant t\}}\mathbb{1}_{\{x\geqslant 0\}}\mathrm{d}x = \int_0^t f_1(t-x)f_2(x)\mathrm{d}x\,,$$

ja, kun $t \geqslant 0$, antaa integraali nollan. Kokeillaan siis, mitä tapahtuu, kun otetaan Laplacen muunnos funktiosta $h(t) := \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\mathrm{d}\tau$, olettaen, että f_1 ja f_2 toteuttavat Lauseen 8.3 ehdot.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[h](s) &= \int_0^{\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-st} \int_0^{\infty} \mathrm{d}\tau\, \mathbb{1}_{\{\tau\leqslant t\}} f_1(t-\tau)f_2(\tau) = \int_0^{\infty} \mathrm{d}\tau \int_0^{\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-st}\mathbb{1}_{\{\tau\leqslant t\}} f_1(t-\tau)f_2(\tau) \\
&= \int_0^{\infty} \mathrm{d}\tau\, f_2(\tau) \int_{\tau}^{\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-st} f_1(t-\tau) = \int_0^{\infty} \mathrm{d}\tau\, f_2(\tau) \int_0^{\infty} \mathrm{d}u\, \mathrm{e}^{-s(u+\tau)} f_1(u) \\
&= \int_0^{\infty} \mathrm{d}\tau\, f_2(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}\mathcal{L}[f_1](s) = \mathcal{L}[f_1](s)\mathcal{L}[f_2](s)\,,
\end{aligned}$$

ainakin, kun $\operatorname{Re} s > a_, a_2$, jotta kaikki yllä olevat integraalit suppenevat itseisesti ja Fubinin lauseta saa käyttää ensimmäisessä integrointijärjestyksen vaihdossa.

Eli tätä muotoa olevalle konvoluutiolle Laplacen muunnos käyttäytyy aivan kuten Fourier'n muunnoskin, eli

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\mathrm{d}\tau\right] = F_1(s)F_2(s)\,,} \quad F_i(s) := \mathcal{L}[f_i](s)\,,\ i = 1, 2\,.$$

Tulon Laplacen muunnoksesta tuleekin jo vähän hankalammin käytettävä tulos. Merkitään taas $F_1 := \mathcal{L}[f_1]$, $F_2 := \mathcal{L}[f_2]$, ja oletetaan, että a_1 ja a_2 ovat vakiot, joilla f_1 ja f_2 toteuttavat Lauseen 8.3 ehdot.

Oletetaan, että f_2 on niin säännöllinen, että sen Laplacen käänteismuunnoskaava suppenee itseisesti. Tällöin, jos $\sigma > a_2$, melkein kaikilla $t > 0$ pätee

$$f_2(t) = \int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{ts'}F_2(s')\frac{\mathrm{d}s'}{2\pi\mathrm{i}}\,.$$

Tämä voidaan sijoittaa tulon $f_1(t)f_2(t)$ Laplacen muunnoksen määritelmään olettaen $\operatorname{Re} s > a_1 + \sigma$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f_1 f_2](s) &= \int_0^{\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-st} f_1(t)f_2(t) = \int_0^{\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-st} f_1(t) \int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty} \frac{\mathrm{d}s'}{2\pi\mathrm{i}} \mathrm{e}^{ts'}F_2(s') \\
&= \int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty} \frac{\mathrm{d}s'}{2\pi\mathrm{i}} F_2(s') \int_0^{\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-(s-s')t} f_1(t) = \int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty} \frac{\mathrm{d}s'}{2\pi\mathrm{i}} F_1(s-s')F_2(s')\,.
\end{aligned}$$

Tulon muunnoksesta saadaan siis konvoluutiointegraali, mutta kompleksitason viivaintegraalina. Tässä on myös oleellista, että polun reaaliosa σ on valittu riittävän suureksi ($\sigma > a_2$).

8.2.4 Esimerkkejä Laplacen muunnoksen käytöstä

Taulukossa 8.1 on yhteenveto edellä johdetuista Laplacen muunnoksista ja niiden yleisistä ominaisuuksista. Lisää vastaavanlaisia tuloksia löytyy esimerkiksi Wikipediasta (`https://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_transform`). Alla on annettu esimerkkejä siitä, miten näitä taulukon tuloksia voi hyödyntää käytännössä. Aloitetaan parista suoraviivaisesta esimerkistä, jossa vältetään integrointi Laplacen muunnosta ja käänteismuunnosta laskettaessa taulukkoa soveltamalla.

Taulukko 8.1: **Yhteenveto tässä Luvussa johdetuista Laplacen muunnoskaavoista.** Kaavoissa käytetään vasemman puolen funktioiden f, g Laplacen muunnoksista merkintöjä $F = \mathcal{L}[f]$ ja $G = \mathcal{L}[g]$.

Funktio, $t > 0$	Laplacen muunnos, $s \in \mathbb{C}$	Tarkennuksia
1	s^{-1}	
e^{ct}	$\frac{1}{s-c}$	$c \in \mathbb{C}$
t^c	$\Gamma(c+1)s^{-(c+1)}$	$\operatorname{Re} c > -1$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\omega \in \mathbb{C}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\omega \in \mathbb{C}$
$\frac{\mathrm{e}^{c_1 t} - \mathrm{e}^{c_2 t}}{t}$	$\overline{\ln}\,\frac{s-c_2}{s-c_1}$	$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
$\alpha f(t) + \beta g(t)$	$\alpha F(s) + \beta G(s)$	$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0^+)$	
$t^k f(t)$	$(-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k} F(s)$	$k \in \mathbb{N}$
$\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$	$\frac{1}{s}F(s)$	
$t^{-1} f(t)$	$\int_s^\infty F(s')\mathrm{d}s'$	$t^{-1}f(t)$ integroituva, $s > 0$
$f(t-\tau)\mathbb{1}_{\{t \geqslant \tau\}}$	$\mathrm{e}^{-\tau s} F(s)$	$\tau \geqslant 0$
$\mathrm{e}^{ct} f(t)$	$F(s-c)$	$c \in \mathbb{C}$
$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{t \geqslant n\tau\}}$	$\frac{1}{s}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-s\tau}}$	$\tau > 0$
$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau$	$F(s)G(s)$	
$f(t)g(t)$	$\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty} F(s-s')G(s')\frac{\mathrm{d}s'}{2\pi\mathrm{i}}$	$\sigma >$ ”a” g:lle Lauseessa 8.3

Esimerkki 8.15 Laske funktion $f(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\sin(\omega t)$ Laplacen muunnos, kun $\omega, \gamma \in \mathbb{C}$.
Ratkaisu: Kaavojen (8.10) ja (8.8) mukaan, kun $\operatorname{Re} s$ on tarpeeksi suuri,

$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin(\omega t)](s) = \mathcal{L}[\sin(\omega t)](s-(-\gamma)) = \left.\frac{\omega}{(s')^2+\omega^2}\right|_{s'=s+\gamma} = \frac{\omega}{(s+\gamma)^2+\omega^2}\,.$$

Esimerkki 8.16 Laske funktion $F(s) = \frac{\mathrm{e}^{-3s}}{s^2+4}$ Laplacen käänteismuunnos.
Ratkaisu: Havaitaan, että $\frac{1}{s^2+4} = \frac{1}{2}\frac{\omega}{\omega^2+s^2}\big|_{\omega=2} = \frac{1}{2}\mathcal{L}[\sin(2t)](s)$. Näin ollen $F(s) = \mathrm{e}^{-3s}\mathcal{L}[\frac{1}{2}\sin(2t)](s)$, joten se on Laplacen muunnos funktiosta $f(t) = \frac{1}{2}\sin(2t)$ ajalla $\tau = 3$ viivästyneenä. Toisin sanoen $F(s) = \mathcal{L}[g(t)]$, jossa

$$g(t) = \frac{1}{2}\sin(2(t-3))\mathbb{1}_{\{t\geqslant 3\}}\,.$$

Näin ollen funktio $g(t)$ antaa juuri etsityn funktion $F(s)$ Laplacen käänteismuunnoksen.

Differentiaaliyhtälön ratkaiseminen

Esimerkki 8.17 Olkoon $a, b > 0$ annettu. Ratkaise seuraava **pakotetun värähtelijän** differentiaaliyhtälö,

$$x''(t) + a^2x(t) = b\sin(at)\,, \qquad t > 0\,, \tag{8.11}$$

reunaehdoilla $x(0) = x_0$ ja $x'(0) = v_0$, jossa vakiot x_0, $v_0 \in \mathbb{R}$ on annettu.
Ratkaisu: Etsitään säännöllistä ratkaisua $x(t)$, jonka derivaatat x' ja x'' toteuttavat Lauseen 8.3 ehdot. Merkitään x:n Laplacen muunnosta $F(s) = \mathcal{L}[x(t)](s)$. Tällöin sen ensimmäiselle derivaatalle pätee reunaehtojen takia

$$\mathcal{L}[x'](s) = s\mathcal{L}[x](s) - x(0) = sF(s) - x_0\,,$$

ja toiselle derivaatalle vastaavasti

$$\mathcal{L}[x''](s) = s\mathcal{L}[x'](s) - x'(0) = s(sF(s)-x_0) - v_0 = s^2F(s) - x_0s - v_0\,.$$

Ottamalla Laplacen muunnos yhtälön (8.11) molemmista puolista saadaan sen vasemmasta puolesta

$$\mathcal{L}[x''(t) + a^2x(t)](s) = \mathcal{L}[x''](s) + a^2F(s) = (s^2+a^2)F(s) - x_0s - v_0\,,$$

ja Taulukkoa 8.1 hyödyntämällä yhtälön oikea puoli antaa

$$\mathcal{L}[b\sin(at)](s) = b\frac{a}{s^2+a^2}\,.$$

Näin ollen funktion F täytyy toteuttaa (ainakin, kun $\operatorname{Re} s$ on riittävän suuri) yhtälö

$$(s^2+a^2)F(s) - x_0s - v_0 = \frac{ab}{s^2+a^2} \quad\Rightarrow\quad F(s) = \frac{v_0+x_0s}{s^2+a^2} + \frac{ab}{(s^2+a^2)^2}\,.$$

Riittää siis enää etsiä oikean puolen Laplacen käänteismuunnos. Tehdään tämä jakamalla se termeihin, jotka tunnistetaan jonkin jo johdetun funktion Laplacen muunnoksiksi Taulukon 8.1 avulla. Aloitetaan helpoimmasta

$$\frac{v_0}{s^2+a^2} = \frac{v_0}{a}\frac{a}{s^2+a^2} = \frac{v_0}{a}\mathcal{L}[\sin(at)](s) = \mathcal{L}\Big[\frac{v_0}{a}\sin(at)\Big](s)\,.$$

Samalla tavalla huomataan, että

$$\frac{x_0s}{s^2+a^2} = x_0\mathcal{L}[\cos(at)](s) = \mathcal{L}[x_0\cos(at)](s)\,.$$

Viimeisen termin tunnistaminen on vähän työläämpää. Huomataan kuitenkin, että jos $g(t) = \sin(at)$, on sen Laplacen muunnos $G(s) := \mathcal{L}[f](s) = \frac{a}{s^2+a^2}$, joten konvoluutiokaavan mukaan

$$\frac{a^2}{(s^2+a^2)^2} = G(s)G(s) = \mathcal{L}\left[\int_0^t g(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau\right](s)\,.$$

Näin ollen

$$\frac{ab}{(s^2+a^2)^2} = \frac{b}{a}\frac{a^2}{(s^2+a^2)^2} = \frac{b}{a}\mathcal{L}[h](s)\,,$$

funktiolle

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^t g(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t \sin(at-a\tau))\sin(a\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t \frac{1}{2}\left[\cos(at-a\tau-a\tau) - \cos(at-a\tau+a\tau)\right]\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \cos(at-2a\tau)\mathrm{d}\tau - \frac{t}{2}\cos(at) \\ &= -\frac{t}{2}\cos(at) + \frac{1}{2}\Big/_0^t \frac{1}{-2a}\sin(at-2a\tau) = -\frac{t}{2}\cos(at) - \frac{1}{4a}(\sin(-at)-\sin(at)) \\ &= -\frac{t}{2}\cos(at) + \frac{1}{2a}\sin(at)\,, \end{aligned}$$

jossa integraalin laskemiseksi on käytetty hyväksi trigonometristä summakaavaa $2\sin x\sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$.

Yhteenvetona nähdään siis, että $\mathcal{L}[x](s) = \frac{v_0+x_0 s}{s^2+a^2} + \frac{ab}{(s^2+a^2)^2}$ käyttäen funktiota

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{v_0}{a}\sin(at) + x_0\cos(at) + \frac{b}{a}\left(\frac{1}{2a}\sin(at) - \frac{t}{2}\cos(at)\right) \\ &= \left(\frac{v_0}{a} + \frac{b}{2a^2}\right)\sin(at) + \left(x_0 - \frac{b}{2a}t\right)\cos(at)\,. \end{aligned}$$

Tämän jälkeen onkin suoraviivainen lasku tarkistaa, että näin määritelty funktio toteuttaa halutun differentiaaliyhtälön ja reunaehdot.

Vastaus: Löytyy vain yksi ratkaisu, joka toteuttaa kaikki ehdot:

$$x(t) = \left(\frac{v_0}{a} + \frac{b}{2a^2}\right)\sin(at) + \left(x_0 - \frac{b}{2a}t\right)\cos(at)\,, \quad t \geqslant 0\,.$$

Ratkaisussa on ehkä vähän yllättävä lineaarisesti kasvava ja oskilloiva termi $-\frac{b}{2a}t\cos(at)$. Tämä termi liittyy värähtelijän "pakottamiseen", jonka voi ajatella lisäävän jatkuvasti värähtelijän "energiaa". Jos differentiaaliyhtälön oikean puolen "pakotustermi" poistetaan sijoittamalla $b = 0$, poistuu myös tämä lineaarisesti kasvava termikin ja jäljelle jää tavallinen värähtelijäratkaisu $x(t) = \frac{v_0}{a}\sin(at) + x_0\cos(at)$.

Integraalin avulla määritellyn funktion laskeminen

Esimerkki 8.18 Esitä seuraava integraalin avulla määritelty funktio alkeisfunktioiden avulla,

$$f(t) := \int_0^\infty \frac{1-\cos(xt)}{x^2}\mathrm{d}x\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Ratkaisu: Koska $1 - \cos(xt) \geqslant 0$, on integrandi positiivinen. Näin ollen voidaan sen Laplacen muunnosta $F = \mathcal{L}[f]$ laskiessa vaihtaa integrointijärjestystä, ainakin kun $s > 0$, josta saadaan

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty \mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{-st}f(t) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{-st}\int_0^\infty \mathrm{d}x\frac{1-\cos(xt)}{x^2} \\ &= \int_0^\infty \mathrm{d}x\frac{1}{x^2}\int_0^\infty \mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{-st}(1-\cos(xt)) = \int_0^\infty \mathrm{d}x\frac{1}{x^2}(\mathcal{L}[1](s) - \mathcal{L}[\cos(xt)](s))\,. \end{aligned}$$

Tässä Taulukosta 8.1 löydetään

$$\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s}, \quad \text{ja} \quad \mathcal{L}[\cos(xt)](s) = \frac{s}{s^2+x^2}.$$

Näin ollen

$$\mathcal{L}[1](s) - \mathcal{L}[\cos(xt)](s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+x^2} = \frac{s^2+x^2-s^2}{s(s^2+x^2)} = \frac{x^2}{s(s^2+x^2)},$$

joten saadaan

$$F(s) = \int_0^\infty \mathrm{d}x \frac{1}{x^2}\frac{x^2}{s(s^2+x^2)} = \int_0^\infty \mathrm{d}x \frac{1}{s(s^2+x^2)} \overset{x=su}{=} \int_0^\infty \mathrm{d}u\, s \frac{1}{s(s^2+s^2u^2)} = \frac{1}{s^2}\int_0^\infty \mathrm{d}u \frac{1}{1+u^2}.$$

Jäljelle jäävän integraali arvo seuraa Esimerkin 3.20 tuloksesta, integrandin parillisuutta käyttäen,

$$\int_0^\infty \mathrm{d}u \frac{1}{1+u^2} = \frac{1}{2}2\int_0^\infty \mathrm{d}u \frac{1}{1+u^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}u \frac{1}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Näin ollen $F(s) = \frac{\pi}{2}s^{-2}$, kun $s > 0$, ja joten se pätee myös kaikilla $\mathrm{Re}\, s > 0$, Laplacen muunnoksen analyyttisyyden takia. Tämän jälkeen voidaan turvautua vielä kerran Taulukkoon 8.1, jonka mukaan

$$F(s) = \frac{\pi}{2}s^{-2} = \frac{\pi}{2}\Gamma(2)s^{-2} = \frac{\pi}{2}\mathcal{L}[t](s) = \mathcal{L}[\frac{\pi}{2}t](s).$$

Tästä seuraa, että melkein kaikilla $t > 0$ pätee

$$f(t) = \frac{\pi}{2}t.$$

Nyt integraalin määräämä funktio on selvästi parillinen $f(-t) = f(t)$, ja se on lisäksi jatkuva.[3] Näin ollen $f(t) = \frac{\pi}{2}t$ kaikilla $t \geqslant 0$, josta seuraa lopulta arvoille $t < 0$ tulos $f(t) = f(-t) = \frac{\pi}{2}(-t) = \frac{\pi}{2}|t|$.

Vastaus: Kaikilla reaalisilla t pätee

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos(xt)}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}|t|.$$

8.3 (Lisä) Mellinin muunnos

[3](MAT) Tämän näkee esimerkiksi Lebesguen dominoidun konvergenssin lausetta käyttäen.

Luku 9

Distribuutiot

9.1 Motivaatio

Kuten aiemmin mainittiin, monia fysiikan ilmiöitä kuvataan yhtälöillä, jotka riippuvat *tiheyksistä* $\rho(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3$. Esimerkiksi Maxwellin yhtälöt, jotka kuvaavat jonkin aineen sähkömagneettisia ominaisuuksia, riippuvat aineen varaustiheydestä. Tämä on funktio, joka kertoo kuinka paljon jossain annetussa tilavuudessa $V \subset \mathbb{R}^3$ on sähkövarausta Q_V integraalina

$$Q_V = \int_V \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, \mathbb{1}_{\{\boldsymbol{r}\in V\}}\rho(\boldsymbol{r})\,.$$

Elektroni on pistemäinen hiukkanen, jonka varaus on $q_e < 0$. Millaista varaustiheyttä pitäisi käyttää Maxwellin yhtälöissä, kun elektroni on pisteessä $\boldsymbol{r}_0 \in \mathbb{R}^3$? *Ongelma:* Ei ole olemassa mitään *funktiota* $\rho(\boldsymbol{r})$, jolle pätisi kaikilla $V \subset \mathbb{R}^3$ toivottu tulos

$$\int_V \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} q_e\,, & \text{kun } \boldsymbol{r}_0 \in V \\ 0\,, & \text{kun } \boldsymbol{r}_0 \notin V \end{cases} = q_e\mathbb{1}_{\{\boldsymbol{r}_0\in V\}}\,.$$

Tämän ongelman pystyy kiertämään luopumalla vaatimuksesta, että tiheys $\rho(\boldsymbol{r})$ olisi aina funktion antama. Sen sijaan ajatellaankin, että tiheys on *sääntö*, joka kertoo mitä tapahtuu, kun sen suhteen integroidaan annettuja **testifunktioita**. Esimerkiksi yllä jokaiselle testifunktiolle f määritellään

$$\rho[f] = {}'' \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, \rho(\boldsymbol{r})f(\boldsymbol{r})''\,.$$

joka kertoo mikä on f:n mittaama varaus. Esimerkiksi yllä mainittu elektronin varaustiheys integroituna yli jonkin testifunktion f määritellään säännöllä

$$\rho_e[f] := q_e f(\boldsymbol{r}_0)\,.$$

Näin määriteltyä sääntöä, joka matemaattisesti on siis kuvaus testifunktioilta kompleksiluvuille, merkitään yleensä käyttäen muodollisesti funktioilta näyttävää notaatiota

$$\rho_e(\boldsymbol{r}) = q_e\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\,, \quad \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3\,.$$

Tässä esiintyvää "funktiota" $\delta(\boldsymbol{r})$ kutsutaan **Diracin δ-distribuutioksi**. Sen tarkempi määritelmä ja siitä usein käytetyt muodolliset integraalimerkinnät kuuluvat

$$\boxed{\delta[f] = \delta_{\boldsymbol{0}}[f] := f(\boldsymbol{0}) = {}'' \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, \delta(\boldsymbol{r})f(\boldsymbol{r})''}\,, \qquad \delta_{\boldsymbol{r}_0}[f] := f(\boldsymbol{r}_0)\,. \tag{9.1}$$

9.2 Funktiojonon rajana määritelty distribuutio

Pistemäisten hiukkasten lisäksi distribuutiot ovat käteviä myös seuraavassa tilanteessa: Oletetaan, että (varaus)tiheys on *funktion* $\rho_\varepsilon(\boldsymbol{r})$ antama, ja se on keskittynyt täysin (esimerkiksi) origoon, ε-säteisen pallon sisälle. Mitataan varaustiheyttä laitteella, jonka paikkaresoluutio on $R \gg \varepsilon$. Jos laite on asetettuna pisteeseen $\boldsymbol{r}_0$, antaa se mittaustulokseksi siis $\approx Q := \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, \rho_\varepsilon(\boldsymbol{r})$, eli kokonaisvarauksen, jos $|\boldsymbol{r}_0| \lesssim R$, ja 0 muuten. Koska laitteen resoluutio ei riitä erottamaan funktion ρ_ε yksityiskohtia, onkin tällöin helpompi ilmoittaa mittaustulos distribuutiona, eli yllä olevassa tapauksessa voitaisiin sanoa

$$\rho_\varepsilon(\boldsymbol{r}) \simeq Q\delta(\boldsymbol{r}) .$$

Matemaattisesti tätä tilannetta voidaan mallintaa olettamalla, että ρ_ε on jonkin funktion g määräämä, kaavan

$$\rho_\varepsilon(\boldsymbol{r}) = \varepsilon^{-3} g\Big(\frac{\boldsymbol{r}}{\varepsilon}\Big)$$

avulla (tässä siis g kertoo jakauman muodon, mutta sen **pituusskaala** on ε:n antama). Oletetaan lisäksi, että g on keskittynyt origoon; tarkemmin oletetaan, että $g(\boldsymbol{x}) = 0$ aina, kun $|\boldsymbol{x}| \geqslant 1$. Tällöin nähdään, että $\rho_\varepsilon(\boldsymbol{r}) = 0$, kun $\frac{|\boldsymbol{r}|}{\varepsilon} \geqslant 1$, eli kun $|\boldsymbol{r}| \geqslant \varepsilon$, eli näin saatu funktion on todellakin keskittynyt ε-säteisen pallon sisälle. Edessä oleva kerroin on valittu sillä perusteella, että kokonaisvaraus ei riippuisi skaalasta ε: nythän

$$Q = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, \rho_\varepsilon(\boldsymbol{r}) = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, \varepsilon^{-3} g\Big(\frac{\boldsymbol{r}}{\varepsilon}\Big) = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, g(\boldsymbol{x}) .$$

Valitaan pituusyksikkö siten, että se vastaa laitteen resoluutiota, eli siten että $R \approx 1$. Oletetaan, että laitteen "mittausprofiili" on tällöin funktion f antama: tarkemmin oletetaan, että jos laite on sijoitettu pisteeseen $\boldsymbol{r}_0$ ja se mittaa todellista jakaumaa $\rho(\boldsymbol{r})$, niin laite antaa arvoksi

$$Q_{\text{mitattu}}(\boldsymbol{r}_0) = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, f(\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r}) .$$

Tarkastellaan nyt, mitä tapahtuu, kun $R \gg \varepsilon$, eli mittaustarkkuus on paljon suurempi kuin mitattavan jakauman konsentraatiosäde. Pisteessä $\boldsymbol{r}_0$ mitattuna saadaan tällöin

$$\begin{aligned} Q_{\text{mitattu}}(\boldsymbol{r}_0) &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, f(\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r})\rho_\varepsilon(\boldsymbol{r}) = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, f(\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r})\varepsilon^{-3} g\Big(\frac{\boldsymbol{r}}{\varepsilon}\Big) \\ &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, f(\boldsymbol{r}_0 + \varepsilon\boldsymbol{x}) g(\boldsymbol{x}) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, f(\boldsymbol{r}_0) g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{r}_0) Q = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, f(\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}) Q\delta(\boldsymbol{r}) . \end{aligned}$$

Näin ollen riippumatta mittalaitteen profiilista f pätee

$$\rho_\varepsilon(\boldsymbol{r}) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} Q\delta(\boldsymbol{r}) ,$$

ja approksimaatio $\rho_\varepsilon(\boldsymbol{r}) \approx Q\delta(\boldsymbol{r})$ kuvaa mittaustuloksia hyvin aina, kun $\varepsilon \ll R$.

Yleisestikin voidaan puhua funktiojonon suppenemisesta kohti jotain distribuutiota.

Määritelmä 9.1 ***Jono*** $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***funktioita*** $F_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ ***suppenee kohti distribuutiota*** Λ, *jos kaikilla testifunktioilla f pätee*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}^d\boldsymbol{r}\, F_n(\boldsymbol{r}) f(\boldsymbol{r}) = \Lambda[f] .$$

Tätä voidaan merkitään myös lyhyemmin $F_n \to \Lambda$, kun $n \to \infty$.

Esimerkki 9.2 Yleinen versio alun esimerkistä saadaan valitsemalla jokin piste $\boldsymbol{r}_0 \in \mathbb{R}^d$ ja funktio g, jolle $g(\boldsymbol{r}) \geqslant 0$ ja $\int \mathrm{d}^d\boldsymbol{r} g(\boldsymbol{r}) = 1$. Tämän jälkeen määritellään

$$F_n(\boldsymbol{r}) := n^d g(n(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)) .$$

Jos f on nyt jokin testifunktio, saadaan siis muuttujanvaihdolla $\boldsymbol{x} = n(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$ alla olevassa integraalissa raja-arvo

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}^d\boldsymbol{r}\, F_n(\boldsymbol{r})f(\boldsymbol{r}) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}^d\boldsymbol{r}\, n^d g(n(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0))f(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}^d\boldsymbol{x}\, g(\boldsymbol{x}) f\Big(\boldsymbol{r}_0 + \frac{1}{n}\boldsymbol{x}\Big) \\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}^d\boldsymbol{x}\, g(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{r}_0) = f(\boldsymbol{r}_0) = \delta_{\boldsymbol{r}_0}[f]\,.\end{aligned}$$

Näin ollen $F_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \delta_{\boldsymbol{r}_0}$, jota joskus merkitään myös $F_n(\boldsymbol{r}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$.

9.3 (Lisä) Distribuutioiden matemaattinen määritelmä

Distribuutioiden määritelmässä ja niiden ominaisuuksien kannalta tärkein asia on testifunktioiden valinta. Fysiikan sovelluksissa on yleensä kätevintä käyttää testifunktioina Huomautuksessa 7.4 määriteltyjä Schwartzin funktioita, eli valita $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Tästä avaruudesta käytetään myös lyhennysmerkintää $\mathcal{S}_d$. Tällöin saadaan aikaiseksi ns. **hillittyjä distribuutioita** (engl. *tempered distribution*), joiden kokoelmasta käytetään merkintää $\mathcal{S}'_d$. Toisin sanoen, jos $\Lambda \in \mathcal{S}'_d$, on tällöin Λ kuvaus $\mathcal{S} \to \mathbb{C}$, joka liittää jokaiseen Schwartzin funktioon $f \in \mathcal{S}_d$ kompleksiluvun $\Lambda[f] \in \mathbb{C}$. Lisäksi hillityiltä distribuutioilta vaaditaan, että ne ovat jatkuvia lineaarikuvauksia. Erityisesti siis tiedetään, että aivan kuten motivaatioina käytetyille integraalien määrittelemille distribuutioille, pätee $\Lambda[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha\Lambda[f_1] + \beta\Lambda[f_2]$, kun $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ja $f_1, f_2 \in \mathcal{S}_d$.

Tarkka määritelmä sille, mitä distribuutioiden jatkuvuus tässä tarkoittaa, on aika työläs ja jätetään matematiikan kursseille. Asiaan voi halutessaan tutustua joko Wikipediassa (`https://en.wikipedia.org/wiki/Distribution_(mathematics)`) tai lähteestä [4, Luvut 6 ja 7]. Alla on muutama esimerkki siitä, millaiset kuvaukset muodostavat hillittyjä distribuutioita.

- Jos $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ on (mitallinen) funktio ja löytyy $p > 0$, jolla $\int_{\mathbb{R}^d}(1 + |\boldsymbol{r}|^2)^{-p}|F(\boldsymbol{r})|\mathrm{d}^d\boldsymbol{r} < \infty$, on kuvaus
$$\Lambda[f] := \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}^d\boldsymbol{r} F(\boldsymbol{r})f(\boldsymbol{r}) \tag{9.2}$$
hillitty distribuutio.
- Diracin δ-distribuutiot rajoitettuna Schwartzin funktioihin määrittelevät hillittyjä distribuutioita. Toisin sanoen, jos $\boldsymbol{r}_0 \in \mathbb{R}^d$ on annettu ja määritellään $\Lambda[f] := f(\boldsymbol{r}_0)$ kaikille $f \in \mathcal{S}_d$, on kuvaus Λ hillitty distribuutio.

9.4 Distribuutioiden perusominaisuuksia

Distribuutioiden matemaattinen teoria vaatii vähän enemmän työkaluja kuin mitä tässä monisteessa voidaan esittää. Alla on listattu jotain tärkeimpiä ominaisuuksia, joita (hillityille) distribuutiolle pätee. Jos haluaa löytää lisätietoa tai todistuksia näistä tuloksista, kannattaa turvautua edellisessä luvussa mainittuihin lähteisiin.

Distribuutioista saa ottaa lineaarikombinaatioita

Jos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ja Λ_1, Λ_2 ovat distribuutioita, on myös $\alpha\Lambda_1 + \beta\Lambda_2$ distribuutio, kun se määritellään luonnollisella kaavalla

$$(\alpha\Lambda_1 + \beta\Lambda_2)[f] := \alpha\Lambda_1[f] + \beta\Lambda_2[f]\,, \qquad f \in \mathcal{S}_d\,.$$

Esimerkiksi yllä käytetty distribuutio $Q\delta_{\boldsymbol{r}_0}$ saadaan tällä tavalla: jos $f \in \mathcal{S}_d$, määriteltiin $(Q\delta_{\boldsymbol{r}_0})[f] = Qf(\boldsymbol{r}_0) = Q\delta_{\boldsymbol{r}_0}[f]$.

Distribuutioita saa derivoida

Jos ∂_i merkitsee osittaisderivaattaa $\frac{\partial}{\partial r_i}$, *määritellään* distribuution Λ derivaatta kuvauksena

$$(\partial_i \Lambda)[f] := -\Lambda[\partial_i f]\,. \tag{9.3}$$

Perustelu tälle kaavalle tulee distribuutioista Λ_F, jotka on annettu jonkin jatkuvasti derivoituvan ja korkeintaan polynomiaalisesti kasvavan funktion F avulla kaavaa (9.2) käyttämällä. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että $d = 1$, jolloin osittaisderivaatta on sama kuin muuttujan suhteen otettu derivaatta. Tällöin testifunktiolle f saadaan osittaisintegroimalla tulos

$$-\Lambda_F[f'] = -\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, F(x) f'(x) = -\Big/_{-\infty}^{\infty} F(x)f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, F'(x)f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, F'(x) f(x)\,,$$

sillä sijoitustermit häviävät, koska f häviää äärettömyydessä nopeammin kuin F. Tässä tilanteessa on siis distribuution Λ_F derivaatta sama kuin derivaatan F' määräämä distribuutio $\Lambda_{F'}$.

Esimerkki 9.3 Tutkitaan mitä tapahtuu, jos otetaan derivaatta Heavisiden funktion $\theta(x) = \mathbb{1}_{\{x>0\}}$ määräämästä distribuutiosta Λ_θ. Lähtien liikkeelle määritelmästä saadaan testifunktiolle f tulos

$$\Lambda[f'] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \theta(x) f'(x) = \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}x\, f'(x) = \Big/_{0}^{\infty} f(x) = 0 - f(0)\,.$$

Näin ollen $-\Lambda[f'] = f(0) = \delta_0[f]$, joten $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Lambda_\theta = \delta_0$. Koska Heavisiden funktion määräämän distribuution derivaatta on siis δ-distribuutio, merkitäänkin joskus $\theta'(x) = \delta(x)$. Tämän merkinnän kanssa täytyy kuitenkin olla tarkkana: funktiolla $\theta(x)$ on olemassa myös normaali derivaatta kaikissa pisteissä $x \neq 0$ ja tällöin pätee $\theta'(x) = 0$. Näin saatu funktio on kuitenkin nollafunktio, ja sen määräämä distribuutio $\Lambda_{\theta'}$ on nolladistribuutio (se kuvaa kaikki testifunktiot nollalle). Koska lähdettiin liikkeelle funktiosta, joka ei ole derivoituva origossa, on tässä $\partial_x \Lambda_\theta \neq \Lambda_{\theta'}$.

Esimerkki 9.4 Mikä on δ-distribuution derivaatta?
Ratkaisu: Jos f on testifunktio, saadaan määritelmistä $\delta'[f] := -\delta[f'] = -f'(0)$, eli nyt distribuution arvo riippuukin testifunktion derivaatan arvosta origossa.

Distribuutioita saa kertoa säännöllisillä funktioilla

Distribuution Λ kertominen funktiolla g tarkoittaa kuvausta

$$(g\Lambda)[f] := \Lambda[gf]\,.$$

Tässä funktion g on oltava riittävän säännölinen, jotta gf on Schwartzin funktio aina, kun f on Schwartzin funktio. Esimerkiksi g voi olla mikä tahansa polynomi, Schwarzin funktio tai näiden tulo.

Hillityistä distribuutioista saa ottaa Fourier'n muunnoksen

Kun $\Lambda \in \mathcal{S}'_d$, määritellään sen Fourier'n muunnos $\widehat{\Lambda}$ kuvauksena

$$\widehat{\Lambda}[f] := \Lambda\Big[\widehat{f}\Big]\,, \qquad f \in \mathcal{S}_d\,. \tag{9.4}$$

Tällöin on myös kuvaus $\widehat{\Lambda}$ hillitty distribuutio, eli kuuluu joukkoon $\in \mathcal{S}'_d$.

Esimerkki 9.5 Mikä on vakiofunktion $F(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$, määräämän distribuution Λ_F Fourier'n muunnos?

Ratkaisu: Kun $f \in \mathcal{S}_1$, pätee Fourier'n muunnoksen käänteismuunnos jokaisessa pisteessä, erityisesti siis origossa $f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(p)\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}$. Käyttäen distribuution Λ määritelmää nähdään siis

$$\Lambda\left[\widehat{f}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \widehat{f}(x) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(p)\frac{\mathrm{d}p}{2\pi} = 2\pi f(0) = 2\pi\delta_0[f]\,.$$

Näin ollen $\widehat{\Lambda}_F = 2\pi\delta_0$. Tämä tulos ilmaistaan usein sanomalla, että

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Distribuution voi joskus yhdistää muuttujanvaihdon kanssa

Aloitetaan esimerkin vuoksi yksiulotteisesta tapauksesta, jossa Λ_F on funktion F määräämä distribuutio. Katsotaan mitä tapahtuu, jos määrittevään integraaliin tehdään muuttujanvaihto. Olkoon tätä varten $\varphi(x)$ funktio, jolle $\varphi'(x) > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja lisäksi $\lim_{x\to\infty}\varphi(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty}\varphi(x) = -\infty$. Tällöin voidaan tutkia yhdistetyn funktion $G(x) := F(\varphi(x))$ määräämää distribuutiota, jolle pätee kaikilla testifunktioilla f tulos

$$\begin{aligned}\Lambda_G[f] &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, F(\varphi(x))f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \varphi'(x)\frac{F(\varphi(x))}{\varphi'(x)}f(x)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y F(y)\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))}f(\varphi^{-1}(y)) = \Lambda_F[h]\,,\end{aligned}$$

jossa on tehty muuttujanvaihto $y = \varphi(x)$ ja sen avulla saatu funktio $h(y) := \frac{f(\varphi^{-1}(y))}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))}$. Tarkasti ottaen vaaditaan toki vielä jotain lisäehtoja, jotta myös h olisi Schwartzin funktio, mutta välivaiheet pitävät paikkansa yleisimminkin.

Tätä laskua sovelletaan usein myös δ-distribuutioon ja määritellään sen avulla distribuutio $\delta(\varphi(x))$ kaavan oikean puolen arvona, eli määrittelemällä

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta(\varphi(x))f(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, \delta(y)h(y) = h(0) = \frac{f(x_0)}{\varphi'(x_0)} = \frac{1}{\varphi'(x_0)}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta(x - x_0)f(x)\,,$$

jossa $x_0 = \varphi^{-1}(0)$. Koska funktio φ on tässä aidosti kasvava, löytyy arvo x_0 myös yhtälön $\varphi(x_0) = 0$ yksikäsitteisenä ratkaisuna ja voidaan lyhyesti merkitä

$$\delta(\varphi(x)) = \frac{1}{\varphi'(x_0)}\delta(x - x_0)\,.$$

Diracin δ-distribuution tapauksessa määritelmää käytetään yleisemmillekin jatkuvasti derivoituville funktioille φ. Tällöin riittää, että jokaisen yhtälön $\varphi(x_0) = 0$ ratkaisun x_0 ympäristössä voidaan tehdä vastaavanlainen muuttujanvaihto, joka on mahdollista, jos $\varphi'(x_0) \neq 0$. Tällöin löytyy pisteen x_0 sisältävä väli, jossa φ' ei vaihda merkkiä. Voidaan siis jakaa integraali reaaliakselin yli näihin väleihin ja niiden komplementtiin, jossa $\varphi(x) \neq 0$. Komplementissa sijoitetaan $\delta(\varphi(x)) = 0$ ja jokaisella välillä tehdään muuttujanvaihto $y = \varphi(x)$. Tästä saadaan lopputulokseksi yleinen määritelmä

$$\boxed{\delta(\varphi(x)) := \sum_{x_0} \frac{1}{|\varphi'(x_0)|}\delta(x - x_0)}\,,$$

jossa summataan kaikkien yhtälön $\varphi(x_0) = 0$ ratkaisujen yli. Näin yleisessä tapauksessa ei ole mitään takeita, että kaavan oikea puoli määrittelee jonkin järkevän distribuution, paitsi jos nollakohtia x_0 on äärellinen määrä. Usein näin kuitenkin käy, ja lopputuloksena voi olla hyvinkin käyttökelpoinen distribuutio.

Alla on tästä muutamia esimerkkejä ja δ-distribuutioon liittyviä laskusääntöjä:

1. $\delta(-x) = \frac{1}{|-1|}\delta(x) = \delta(x)$.

2. $\delta(ax-b) = \frac{1}{|a|}\delta\left(x - \frac{b}{a}\right)$, kun $a \neq 0$ ja $b \in \mathbb{R}$.

3. Kun $a > 0$, saadaan näin myös kaava

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{|2a|}\delta(x-a) + \frac{1}{|2(-a)|}\delta(x+a) = \frac{1}{2a}\left(\delta(x-a) + \delta(x+a)\right) .$$