Luku 7

Fourier'n muunnos

7.1 Johdantoa

Edellä tutkittiin periodisten funktioiden esittämistä Fourier'n sarjan avulla, ja huomattiin, että tämä onnistui koko reaaliakselilla käyttäen periodisuusvälin pituuden yli integroimalla saatuja Fourier'n kertoimia. Löytyykö mitään vastaavaa, jos luovutaan periodisuusoletuksesta, mutta halutaan silti esitys, joka pätee koko reaaliakselilla?

Tämä onnistuu, kunhan funktio toteuttaa joitain lisävaatimuksia, jotka liittyvät sen jatkuvuuteen ja käytökseen äärettömyydessä. Tutkitaan johdantona funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, joka on itseisesti integroituva, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \mathrm{d}x < \infty$, ja toteuttaa Dirichlet'n ehdot jokaisella suljetulla välillä $[-M, M]$, kun $M \in \mathbb{N}$.

Oletetaan, että $x_0 \in \mathbb{R}$ on funktion f jatkuvuuspiste ja että M on niin suuri, että $|x_0| < M$. Tällöin voidaan funktion arvo pisteessä x_0 esittää käyttäen sen väliltä $]-M, M]$ tehdyn periodisen jatkeen suppenevan Fourier'n sarjan avulla, kuten Luvussa 6.4 kerrotaan. Käytetään tässä kehityspisteenä origoa, eli valitaan $a = 0$ (tai sisällytetään vastaava vaihetermi kertoimeen $\widehat{f}_k$), jolloin Lauseesta 6.13 saadaan

$$f(x_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_{k;L} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k \frac{2\pi}{L} x_0} , \tag{7.1}$$

jossa $L := 2M$ on välin pituus ja tässä olevat Fourier'n kertoimet saadaan integraaleista

$$\widehat{f}_{k;L} = \frac{1}{L} \int\limits_{-M}^{M} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k \frac{2\pi}{L} x} \mathrm{d}x , \qquad k \in \mathbb{Z} .$$

Kun $M \gg 1$, näyttäisi hyvältä idealta approksimoida näitä kertoimia käyttäen integraalin avulla määriteltyä funktiota

$$\widehat{f}(p) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} \mathrm{d}x . \tag{7.2}$$

Oletetusta f:n integroituvuudesta seuraa, että funktion $\widehat{f}(p)$ määrittelevä integraali suppenee kaikilla $p \in \mathbb{R}$ (itseasiassa saatu funktio on jopa jatkuva) ja pätee[1] myös $\int\limits_{-M}^{M} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kp} \mathrm{d}x \overset{M\to\infty}{\longrightarrow} \widehat{f}(p)$. Näin ollen

$$\widehat{f}_{k;L} \approx \frac{1}{L} \widehat{f}\left(\frac{2\pi k}{L}\right) ,$$

[1] (MAT) Raja-arvon suppeneminen seuraa Lebesguen dominoidun konvergenssin lauseesta korvaamalla integrointiväli sen karakteristisella funktiolla $\mathbb{1}_{\{|x| \leqslant M\}}$.

Jos oletetaan, että approksimaation tarkkuus säilyy riittävän hyvänä myös suurilla $|k|$:n arvoilla, seuraa kaavasta (7.1) approksimaatio

$$f(x_0) \approx \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi}{L}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{f}\left(\frac{2\pi k}{L}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi k}{L}x_0} \xrightarrow{L\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px_0}\mathrm{d}p\,, \tag{7.3}$$

kunhan $\widehat{f}$ on riittävän säännöllinen, jotta kaavan keskellä oleva Riemannin summa konvergoi kohti oikean puolen vastaavaa integraalia.

Yllä oleviin approksimaatioihin jäi jonkin verran epävarmuutta siitä, milloin kaavat toimivat. Seuraavissa luvuissa on tarkoituksena kertoa, milloin ja missä mielessä kaavan (7.2) määrittelemää muunnosta voidaan käyttää esittämään alkuperäistä funktiota kaavan (7.3) oikean puolen integraaleilla. Osoittautuu, että tästä esityksestä on hyötyä monien fysiikan differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisessa.

7.2 Funktion esittäminen Fourier'n muunnoksen avulla

Määritelmä 7.1 *Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$* ***Fourier'n muunnos*** *on funktio $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, joka määritellään integraalilla*

$$\widehat{f}(p) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\mathrm{d}x\,, \tag{7.4}$$

niille $p\in\mathbb{R}$, joilla integraali suppenee (pääarvomielessä). Funktiota $\widehat{f}$ voidaan merkitä myös symboleilla $\mathcal{F}f$ tai $\mathcal{F}[f]$. Vastaavasti määritellään ***Fourier'n käänteismuunnos*** *funktiolle $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ integraalina*

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\mathrm{d}p\,, \qquad x\in\mathbb{R}\,. \tag{7.5}$$

Huomautus 7.2

- Päinvastoin kuin Fourier'n sarjassa, Fourier'n muunnos ja käänteismuunnos ovat lähes identtisiä operaatioita: $(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}g)(-x)$.
- Fourier'n muunnoksen ja käänteismuunnoksen määritelmissä esiintyy paljon vaihtelua eri alojen välillä (sitä käytetään esim. fysiikassa, insinööritieteissä ja matematiikassa). Esimerkiksi kaavoissa (7.4) ja (7.5) saatetaan vaihtaa eksponenttitermien merkit keskenään, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\leftrightarrow\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}$. Lisäksi käänteismuunnoskaavan vakio $\frac{1}{2\pi}$ saatetaan sijoittaa toisin:
  1. Normitukseltaan helppokäyttöisin on määritellä muunnos muuttujanvaihdon $p=2\pi k$ jälkeen, eli asettamalla
  $$(\mathcal{F}f)(k) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kx}\mathrm{d}x\,, \quad (\mathcal{F}^{-1}g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} g(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi kx}\mathrm{d}k\,. \tag{7.6}$$
  Tällöin muunnoksista tulee entistä symmetrisempiä, $(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = (\mathcal{F}g)(-x)$. Tämä muoto poistaa muitakin myöhemmin ilmaantuvia vastaavia 2π-kertoimia, ks. esim. Parsevalin kaava Lauseessa 7.15.
  2. Toinen tapa tehdä muunnoksista symmetrisempiä, on jakaa kerroin $\frac{1}{2\pi}$ tasaisesti muunnoksen ja käänteismuunnoksen välille, eli määritellä
  $$(\mathcal{F}f)(p) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\mathrm{d}x\,, \qquad (\mathcal{F}^{-1}g)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\mathrm{d}p\,. \tag{7.7}$$

Tätä muotoa käytetään erityisesti matematiikassa, sillä se säilyttää määritelmissä yksinkertaisemman eksponentin muodon, mutta poistaa ylimääräiset kertoimet kaavasta $(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = (\mathcal{F}g)(-x)$.

Fourier'n muunnoksen pisteittäinen kääntyvyys on hankalampaa kuin Fourier'n sarjoissa. Sen sijaan funktioavaruudessa $L^2(\mathbb{R})$ kaikki toimii täsmälleen niin kuin sarjoillakin. Alla on lueteltu kaksi tavallisinta käänteiskuvaustulosta ja palataan myöhemmin Fourier'n muunnoksen kääntyvyyden tarkistamiseen jossain annetussa pisteessä.

Lause 7.3

1. *Jos funktio on* ***neliöintegroituva****, eli* $f \in L^2(\mathbb{R})$*, suppenee sen Fourier'n muunnoksen määrittelevä integraali melkein kaikkialla*[2] *ja* $\mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R})$*. Käänteismuunnoskaava* $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}f] = f$ *pätee funktionormissa ja vastaavalla tavalla melkein kaikissa pisteissä.*

2. *(Lisä) Jos* f *on ns.* ***Schwartzin funktio*** *(ks. alla),* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$*, on sitä myös sen Fourier'n muunnos, eli* $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$*. Tällöin käänteismuunnoskaava pätee pisteittäin, eli* $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}f](x) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$*. Lisäksi tässä kaavassa sekä Fourier'n muunnoksen että käänteismuunnoksen integraalit ovat itseisesti suppenevia.*

TODISTUS Ensimmäinen tuloksista todistetaan matematiikan Fourier-analyysin kurssilla. Todistukset löytyvät myös lähteestä [4, Lauseet 7.7 ja 7.9]. □

Huomautus 7.4

- Kuten Fourier'n sarjaesityksissä, tulee Fourier'n käänteismuunnoskaavastakin tyypillisesti funktion f "hyppykohdassa" arvo vastaavan hypyn puolestavälistä, eli jos f on epäjatkuva pisteessä x, mutta sillä on vasen ja oikea raja-arvo tässä pisteessä, on tyypillisesti
$$(\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}f])(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}\,.$$
- (Lisä) Joukko $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sisältää kaikki ne funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, jotka ovat kaikissa pisteissä mielivaltaisen monta kertaa derivoituvia ja joiden derivaatat (funktio itse mukaan lukien) häviävät äärettömyydessä nopeammin kuin mikään potenssi. Toisin sanoen vaaditaan, että jokaisella $k, n \in \mathbb{N}_0$ löytyy jokin yläraja $C_{k,n}$, jolla
$$|x^n f^{(k)}(x)| \leqslant C_{k,n}\,, \qquad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}\,.$$
Funktioita $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ kutsutaan myös **nopeasti väheneviksi funktioiksi** (engl. *rapidly decreasing function*) tai Schwartzin testifunktioiksi. Jälkimmäinen nimi liittyy niiden käyttöön distribuutioteoriassa, mahdollistaen Fourier'n muunnoksen ottamisen myös distribuutioista, eli viimeisessä luvussa käsiteltävistä yleistetyistä funktioista. Lisää tietoa löytyy esim. Wikipediasta (`https://en.wikipedia.org/wiki/Schwartz_space`).

Esimerkki 7.5 Etsi funktion $f(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, Fourier'n muunnos, kun $a > 0$.
Ratkaisu: Funktio f on nyt itseisesti integroituva, ja sen muunnos voidaan laskea jokaisessa pisteessä suoraan jakamalla integrointiväli kahteen osaan origon kohdalla:
$$\begin{aligned}\hat{f}(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a|x|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{ax}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\mathrm{d}x \\ &= \Big/_{\!-\infty}^{\,0} \frac{1}{a-\mathrm{i}p}\mathrm{e}^{(a-\mathrm{i}p)x} + \Big/_{\!0}^{\,\infty} \frac{1}{-a-\mathrm{i}p}\mathrm{e}^{(-a-\mathrm{i}p)x} = \frac{1}{a-\mathrm{i}p} + \frac{1}{a+\mathrm{i}p} \\ &= \frac{a+\mathrm{i}p+a-\mathrm{i}p}{(a-\mathrm{i}p)(a+\mathrm{i}p)} = \frac{2a}{a^2+p^2}\,,\end{aligned}$$

[2](MAT) Tarkemmin sanottuna: löytyy jokin jono kokonaislukuja M_n, jolle $M_n \to \infty$ ja vastaavat pääarvointegraalit suppenevat melkein kaikilla $p \in \mathbb{R}$. Pääarvointegraalit suppenevat tällöin myös funktionormissa.

jossa äärettömän sisältävät sijoitustermit häviävät, koska $a > 0$. Eli $\widehat{f}(p) = \frac{2a}{p^2+a^2}$, ja käänteismuunnoskaava antaa tällöin esityksen

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{p^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\mathrm{d}p = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{p^2+a^2}\cos(px)\mathrm{d}p\,.$$

Oikeanpuoleisen integraalin arvo on jo itseasiassa laskettu residylaskun avulla Esimerkissä 3.27, kun $x > 0$, ja sen tulokseen sijoittamalla nähdään, että integraalin arvo on tällöin e^{-ax}, eli käänteismuunnoskaava pätee näissä pisteissä. Toisaalta kosinin parillisuuden takia on integraalin arvo tällöin $\mathrm{e}^{-a|x|}$, kun $x < 0$, ja edelleen residylauseen Esimerkin 3.20 mukaan tuottaa integraali arvon 1, kun $x = 0$. Näin ollen tässä saadaan esimerkki funktiosta, jolle Fourier'n käänteismuunnoskaava pätee pisteittäin, vaikka funktio ei olekaan Schwartzin funktio (f ei ole jatkuvasti derivoituva pisteessä $x = 0$).

Huomautus 7.6

- Kun $a = 0$ edellisessä esimerkissä, saadaan vakiofunktio $f(x) = 1$. Tämä on kyllä rajoitettu funktio, mutta se ei ole integroituva reaaliakselin yli, eikä se myöskään kuulu avaruuteen $L^2(\mathbb{R})$. Sen Fourier'n muunnosta ei enää voida voida määritellä funktiona, vaan se tuottaa ns. Diracin δ-distribuution, joita käsitellään viimeisessä luvussa.

- Kun $a < 0$, on funktio f eksponentiaalisesti kasvava. Tällaisella funktiolla ei ole Fourier'n muunnosta edes distribuutiomielessä. Tässä esimerkissä ei myöskään analyyttisestä jatkamisesta parametrin a suhteen ole mitään hyötyä: Fourier'n muunnos $\widehat{f}(p) = \frac{2a}{p^2+a^2}$ on analyyttinen parametrissa a pisteitä $a = \pm\mathrm{i}p$ lukuun ottamatta, joten voisi ajatella, että käyttäisi sitä myös määritelmänä, kun $a < 0$. Vaikka käänteismuunnoskaava tällöin suppeneekin, antaa se yllä lasketun mukaan pisteessä x arvoksi $-\mathrm{e}^{-|a||x|} = -\mathrm{e}^{a|x|}$, joka on hyvin kaukana alkuperäisen funktion arvosta $\mathrm{e}^{-a|x|}$.

7.2.1 Fourier'n kosini- ja sinimuunnokset

Samoin kuin Fourier'n sarjoille, voi saa Fourier'n muunnoksestakin tehtyä Eulerin kaavan avulla, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} = \cos(px) - \mathrm{i}\sin(px)$, samankaltaiset muunnokset, joissa käytetään trigonometrisia funktioita. Näihin turvaudutaan yleensä vain, jos funktio f on parillinen tai pariton.

1. Jos f on *parillinen*, eli $f(-x) = f(x)$ kaikilla x, on funktio $f(x)\cos(px)$ parillinen ja $f(x)\sin(px)$ pariton. Tällöin pätee siis

$$\widehat{f}(p) = 2\int_0^{\infty} f(x)\cos(px)\mathrm{d}x\,.$$

Näin ollen $\widehat{f}(-p) = \widehat{f}(p)$, joten myös $\widehat{f}$ on parillinen, ja käänteismuunnoskaava saa muodon

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\mathrm{d}p = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\widehat{f}(p)\cos(px)\mathrm{d}p\,.$$

2. Jos f on *pariton*, eli $f(-x) = -f(x)$ kaikilla x, on funktio $f(x)\cos(px)$ pariton ja $f(x)\sin(px)$ parillinen. Tällöin pätee siis

$$\widehat{f}(p) = -2\mathrm{i}\int_0^{\infty} f(x)\sin(px)\mathrm{d}x\,,$$

joten myös $\widehat{f}$ on pariton ja käänteismuunnoskaava saa muodon

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\mathrm{d}p = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{i}\widehat{f}(p)\sin(px)\mathrm{d}p\,.$$

Näistä saadaan vakiot sopivasti siirtämällä aikaiseksi kosini- ja sinimuunnokset funktiolle $f(x)$, joka on määritelty positiivisella reaaliakselilla eli, kun $x > 0$. Tällöin tehdään ensin joko parillinen tai pariton jatke h funktiosta f koko reaaliakselille. Parillisessa tapauksessa määritellään $\mathcal{F}_c f = \frac{1}{2}\widehat{h}$ ja parittomassa tapauksessa $\mathcal{F}_s f = \frac{i}{2}\widehat{h}$. Käyttämällä yllä annettuja trigonometrisia esityksiä jatkeen Fourier'n muunnokselle saadaan seuraavat tulokset.

Funktion $f(x)$, $x > 0$, **kosinimuunnos** ja sen käänteismuunnos määritellään kaavoilla

$$(\mathcal{F}_c f)(p) = \int_0^\infty f(x)\cos(px)\mathrm{d}x\,, \qquad p > 0\,, \tag{7.8}$$

$$(\mathcal{F}_c^{-1} g)(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty g(p)\cos(px)\mathrm{d}p\,, \qquad x > 0\,, \tag{7.9}$$

ja vastaava **sinimuunnos** ja sen käänteismuunnos määritellään kaavoilla

$$(\mathcal{F}_s f)(p) = \int_0^\infty f(x)\sin(px)\mathrm{d}x\,, \qquad p > 0\,, \tag{7.10}$$

$$(\mathcal{F}_s^{-1} g)(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty g(p)\sin(px)\mathrm{d}x\,, \qquad x > 0\,. \tag{7.11}$$

Esimerkki 7.7 Tutkitaan suorakulmaista pulssia $f(x) = \mathbb{1}_{\{0<x\leqslant a\}}$, jossa $a > 0$. Laske sen kosini- ja sinimuunnos.
Ratkaisu: Olkoon $p > 0$. Kosinimuunnoksen arvo saadaan tällöin kaavasta

$$(\mathcal{F}_c f)(p) = \int_0^\infty f(x)\cos(px)\mathrm{d}x = \int_0^a \cos(px)\mathrm{d}x = \Big/_{0}^{a} \frac{1}{p}\sin(px) = \frac{\sin(pa)}{p}\,.$$

Sinimuunnokselle pätee vastaavasti

$$(\mathcal{F}_s f)(p) = \int_0^\infty f(x)\sin(px)\mathrm{d}x = \int_0^a \sin(px)\mathrm{d}x = \Big/_{0}^{a} \frac{-1}{p}\cos(px) = \frac{1}{p}(1-\cos(pa))\,.$$

Käänteismuunnoskaavoista saadaan siis laskettua seuraavien integraalien arvot

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(pa)\cos(px)}{p}\mathrm{d}p = \begin{cases} 1\,, & \text{kun } 0 \leqslant x < a\,, \\ \frac{1}{2}\,, & \text{kun } x = a\,, \\ 0\,, & \text{kun } x > a\,, \end{cases}$$

ja sinimuunnokselle

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{(1-\cos(pa))\sin(px)}{p}\mathrm{d}p = \begin{cases} 1\,, & \text{kun } 0 < x < a\,, \\ \frac{1}{2}\,, & \text{kun } x = a\,, \\ 0\,, & \text{kun } x > a \text{ tai } x = 0\,. \end{cases}$$

Tässä arvo pisteessä $x = 0$ johtuu Fourier'n muunnoksessa käytetyn jatkeen parittomuudesta.

7.3 Fourier'n muunnoksen perusominaisuuksia

Lause 7.8 (Riemannin–Lebesguen lemma) *Oletetaan, että f on itseisesti integroituva, eli $C := \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\mathrm{d}x < \infty$. Tällöin sen Fourier'n muunnokselle $\widehat{f}$ pätee:*

1. *$\widehat{f}(p)$ on jatkuva funktio.*

2. $\left|\widehat{f}(p)\right| \leqslant C$ *kaikilla* $p \in \mathbb{R}$.

3. $\lim_{p\to\infty} \widehat{f}(p) = 0 = \lim_{p\to-\infty} \widehat{f}(p)$.

TODISTUS Todistuksen löytää lähteestä [3, Lause 7.5] tai Wikipediasta (`https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann%E2%80%93Lebesgue_lemma`). Kohdat 1 ja 2 ovat suoraviivaisia, viimeinen kohta vaatii vähän enemmän työtä. □

Huomautus 7.9

- Tässä on hyvä huomata, että vaikka $f \in L^2(\mathbb{R})$ ei siitä enää automaattisesti seuraa, että f olisi itseisesti integroituva, tai toisin päin. (Fourier'n sarjan tapauksessahan jokainen $f \in L^2([a, a+L])$ on itseisesti integroituva tällä välillä, kuten Hölderin epäyhtälöstä seuraa.) Esimerkeiksi käyvät $\exp(-|x|)|x|^{-1/2}$, joka on itseisesti integroituva, muttei kuulu avaruuteen $L^2(\mathbb{R})$, ja $1/(1+|x|)$, joka kuuluu avaruuteen $L^2(\mathbb{R})$, muttei ole itseisesti integroituva.

- Kohdan 3 voi myös ilmaista sanomalla, että näillä oletuksilla $\widehat{f}(p) = o(1)$, kun $|p| \to \infty$, eli "f häviää äärettömyydessä".

- Yleisestikin pätee nyrkkisääntö: **mitä säännöllisempi funktio f on, sitä nopeammin sen Fourier'n muunnos häviää äärettömyydessä**. Esimerkiksi seuraavassa Lauseessa nähdään, että jokainen integroituva lisäderivaatta funktiolle lisää Fourier'n muunnoksen häviämisnopeutta yhden p:n potenssin verran.

Alla oleva tulos on keskeinen syy sille, miksi Fourier'n muunnos on niin usein kätevä tapa ratkaista differentiaaliyhtälöitä: **Fourier'n muunnos muuttaa derivaatan polynomilla kertomiseksi**.

Lause 7.10 (Derivaatan Fourier'n muunnos)

1. *Jos f on jatkuvasti derivoituva funktio, jolle $f(x) = o(1)$, kun $|x| \to \infty$, ja sen derivaatta f' on **itseisesti integroituva**, on $\widehat{f}(p) = o(|p|^{-1})$, kun $|p| \to \infty$, ja lisäksi pätee*

$$\boxed{\mathcal{F}[f'](p) = \mathrm{i}p\widehat{f}(p)\,, \quad p \in \mathbb{R}\,.} \tag{7.12}$$

2. *Tutkitaan funktiota f, joka on n kertaa jatkuvasti derivoituva. Oletetaan, että $f^{(k)}$ on itseisesti integroituva kaikilla $0 < k \leqslant n$ ja $f^{(k)}(x) = o(1)$, kun $|x| \to \infty$ ja $0 \leqslant k < n$. Tällöin kaikilla $0 < k \leqslant n$,*

$$\mathcal{F}[f^{(k)}](p) = (\mathrm{i}p)^k \widehat{f}(p)\,, \quad p \in \mathbb{R}\,, \quad \text{ja} \quad \widehat{f}(p) = o(|p|^{-k})\,, \quad |p| \to \infty\,. \tag{7.13}$$

3. *(Lisä) Jos $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, pätee kaikilla $k \in \mathbb{N}$,*

$$\mathcal{F}[f^{(k)}](p) = (\mathrm{i}p)^k \widehat{f}(p)\,, \quad p \in \mathbb{R}\,, \quad \text{ja} \quad \widehat{f}(p) = o(|p|^{-k})\,, \quad |p| \to \infty\,. \tag{7.14}$$

TODISTUS Aloitetaan kohdasta 1. Kun $p \neq 0$ ja $M > 0$, saadaan osittaisintegroimalla

$$\begin{aligned}\int_{-M}^{M} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\mathrm{d}x &= \Big/_{-M}^{M} f(x)\frac{1}{-\mathrm{i}p}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} - \int_{-M}^{M} f'(x)\frac{1}{-\mathrm{i}p}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\mathrm{d}x \\ &\xrightarrow{M\to\infty} \frac{1}{\mathrm{i}p}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{i}p}\mathcal{F}[f'](p)\,,\end{aligned}$$

sillä oletettiinhan, että $f(\pm M) \to 0$, kun $M \to \infty$. Koska tällöin vasen puoli lähestyy arvoa $\widehat{f}(p)$, nähdään, että $\mathcal{F}[f'](p) = \mathrm{i}p\widehat{f}(p)$, kun $p \neq 0$. Jos $\widehat{f}(0)$ suppenee[3], kaava pätee myös pisteessä $p = 0$: tällöin sen oikea puoli antaa nollan ja toisaalta

$$\mathcal{F}[f'](0) = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} f'(x)\mathrm{d}x = \lim_{M\to\infty} \Big/_{-M}^{M} f(x) = \lim_{M\to\infty} (f(M) - f(-M)) = 0\,.$$

Riemannin–Lebesguen lemman (Lause 7.8) mukaan $\mathcal{F}[f'](p) = o(1)$, kun $|p| \to \infty$, joten kaavasta $\mathcal{F}[f'](p) = \mathrm{i}p\widehat{f}(p)$ seuraa suoraan $\lim_{|p|\to\infty}(|p||\widehat{f}(p)|) = 0$, eli $\widehat{f}(p) = o(|p|^{-1})$.

Kohtaa 2 varten huomataan, että se vastaa kohtaa 1, kun $n = 1$, joten tämä tapaus on jo todistettu. Tehdään tämän jälkeen induktio-oletus, että kohdan 2 tulos pätee arvoille $n-1$ saakka. Tällöin arvolla n oletuksista seuraa erityisesti, että aina kun $0 < k \leqslant n$, on $f^{(k-1)}(p) = o(1)$ ja $f^{(k)}(p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}f^{(k-1)}(p)$ on itseisesti integroituva. Näin ollen kohdan 1 ja induktio-oletuksen mukaan

$$\mathcal{F}[f^{(k)}](p) = \mathrm{i}p\mathcal{F}[f^{(k-1)}](p) = \mathrm{i}p(\mathrm{i}p)^{k-1}\widehat{f}(k) = (\mathrm{i}p)^k\widehat{f}(k)\,.$$

Tästä seuraa myös $\widehat{f}(p) = o(|p|^{-k})$, kun $|p| \to \infty$. Kohta 3 on kohdan 2 suora seuraus, sillä Schwartzin funktion määritelmästä seuraa, että kohdan 2 oletukset toteutuvat kaikilla n. □

7.4 Konvoluutio ja sen Fourier'n muunnos

Määritelmä 7.11 *Reaaliakselilla määriteltyiden funktioiden f, g* ***konvoluutio*** *on funktio h, jonka arvot määritellään seuraavan integraalin arvoilla, aina kun integraali suppenee*

$$h(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y\,.$$

Tällöin merkitään $h = f * g$.

Huomautus 7.12

- Jos sekä f että g ovat *itseisesti integroituvia*, suppenee konvoluution määrittelevä integraali itseisesti melkein kaikilla x ja myös funktio $h = f * g$ on tällöin itseisesti integroituva [3, Lause 8.14].
- Muuttujanvaihdolla $y' = x - y$ nähdään helposti, että $h(x) = (g * f)(x)$ aina kun integraali suppenee. Eli **konvoluutio on symmetrinen funktioiden f, g vaihdossa**: $f * g = g * f$.
- Konvoluutio tulee sovelluksissa vastaan esimerkiksi kuvankäsittelyssä ja digitaalisessa signaalinkäsittelyssä. Sovelluksissa käytetäänkin hyväksi yhtä konvoluution perusominaisuuksista: **tyypillisesti $f * g$ on säännöllisempi kuin kumpikaan funktioista f tai g**, eli näin voidaan esimerkiksi silottaa jotain mitattua signaalia g ottamalla siitä konvoluutio jonkin Schwartzin funktion f kanssa. Tämä ominaisuus seuraa suoraan seuraavasta Lauseesta, kun muistaa, että funktion säännöllisyys liittyy sen Fourier'n muunnoksen häviämiseen äärettömyydessä.

Lause 7.13 *Fourier'n muunnos muuttaa konvoluution tuloksi:*

$$\mathcal{F}[f * g](p) = \widehat{f}(p)\widehat{g}(p)\,, \qquad p \in \mathbb{R}\,, \tag{7.15}$$

ainakin, kun f ja g ovat itseisesti integroituvia.

[3](MAT) Vaikka $\widehat{f}(0) = \lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\mathrm{d}x$ ei suppenisikaan, pätee kaava kuitenkin raja-arvomielessä myös pisteessä $p = 0$, sillä $\mathcal{F}[f']$ on jatkuva Riemannin–Lebesguen lemman mukaan, joten $0 = \mathcal{F}[f'](0) = \lim_{p\to 0}\mathcal{F}[f'](p) = \lim_{p\to 0}\left(\mathrm{i}p\widehat{f}(p)\right)$.

TODISTUS Lauseen todistus perustuu integrointijärjestyksen vaihtoon, joka on sallittua ainakin, jos f ja g ovat itseisesti integroituvia (ks. alla oleva Fubinin lause, jota varten on tärkeintä huomata, että näillä oletuksilla $\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-y)||g(y)|\mathrm{d}x]\mathrm{d}y < \infty$). Tällöin nimittäin $h := f * g$ on yllä mainitun tuloksen perusteella itseisesti integroituva, joten sen Fourier'n muunnos on itseisesti integroituvan integraalin antama kaikilla p, ja sille pätee

$$\begin{aligned}\widehat{h}(p) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x'+y)}\mathrm{d}x'\right]\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}py}\widehat{f}(p)\mathrm{d}y = \widehat{f}(p)\widehat{g}(p)\,.\end{aligned}$$

Saatiin siis todistettua kaava (7.15) annetussa erikoistapauksessa. □

(MAT) Alla täydellisyyden vuoksi vielä versio Fubinin lauseesta, jolla pystyy perustelemaan kaikki tämän monisteen integrointijärjestysten vaihdot. Alla oleva jatkuvuuteen liittyvä ehto on erittäin väljä ja se on käytännössä aina totta funktioille, joita tulee vastaan sovelluksissa (esimerkiksi kaikki tässä monisteessa esiintyvät funktiot toteuttavat sen). Sen sijaan itseiseen integroituvuuteen liittyvä ehto (7.16) voi helpostikin jäädä toteutumatta ja sen tarkistaminen on tärkein osa Fubinin lauseen käyttöä. Löytyy suhteellisen yksinkertaisia esimerkkifunktioita, joissa integroituvuusehto (7.16) ei toteudu ja molemmat iteroidut integraali suppenevat, mutta integraalien arvot eivät ole samat (ks. Wikipedian sivun lopun esimerkki, `https://en.wikipedia.org/wiki/Fubini's_theorem`)

Lause 7.14 (Fubinin lause) *Olkoon E', E mitallisia joukkoja (esimerkiksi jotain reaaliakselin rajoitettuja tai rajoittamattomia välejä). Oletetaan, että $F(x', x)$, $x' \in E'$, $x \in E$, on funktio joka on joko jatkuva joukossa $E' \times E$ tai saadaan pisteittäin suppenevana rajana jostain jonosta jatkuvia funktioita (eli löytyy jatkuvat F_n, joilla $F(x', x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x', x)$ melkein kaikilla x', x). Jos jompikumpi alla olevista iteroiduista integraaleista on äärellinen,*

$$\int_{E'}\left[\int_E |F(x',x)|\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x' < \infty \quad \textit{tai} \quad \int_E\left[\int_{E'} |F(x',x)|\mathrm{d}x'\right]\mathrm{d}x < \infty\,, \tag{7.16}$$

niin molemmat näistä integraaleista ovat äärellisiä ja vastaavissa itseisesti suppenevissa integraaleissa saa tehdä integrointijärjestyksen vaihdon:

$$\int_{E'}\int_E F(x',x)\mathrm{d}x\mathrm{d}x' = \int_E\int_{E'} F(x',x)\mathrm{d}x'\mathrm{d}x = \int_{E'\times E} F(x',x)\mathrm{d}(x',x)\,.$$

TODISTUS Oletuksista seuraa, että funktio F on pisteittäinen raja mitallisista funktioista, joten se on mitallinen tulomitan suhteen joukossa $E' \times E$. Lisäksi Lebesguen mitat ovat σ-äärellisiä, joten Fubinin lausetta saa soveltaa, kunhan jompikumpi iteroiduista integraaleista on itseisesti suppeneva. Yksityiskohtia lauseesta löytyy lähteestä [3, Lause 8.8], reaalianalyysin kursseilla ja Wikipediasta (`https://en.wikipedia.org/wiki/Fubini's_theorem`). □

7.5 Parsevalin ja Plancherelin kaavat Fourier'n muunnokselle

Parsevalin ja Plancherelin kaavat yleistyvät myös Fourier'n muunnokselle, kuten alla näytetään. Huomataan, että Plancherelin kaava sanoo, että Fourier'n muunnos säilyttää skalaaritulon arvon kerrointa $\frac{1}{2\pi}$ vaille: $\langle g|f\rangle = \frac{1}{2\pi}\left\langle \widehat{g}\middle|\widehat{f}\right\rangle$, kun $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Jos olisi käytetty jotain Luvun 7.2 alussa mainituista vaihtoehtoisista määritelmistä Fourier'n muunnokselle, olisi tässä päästy eroon myös ylimääräisestä kertoimesta, ja niille Plancherelin kaava kuuluisikin $\langle g|f\rangle = \langle \mathcal{F}[g]|\mathcal{F}[f]\rangle$.

Koska Fourier'n muunnos $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ on lisäksi lineaarinen ja kääntyvä, seuraa tästä, että **Fourier'n muunnos on avaruuden $L^2(\mathbb{R})$ unitaarinen kuvaus**. Tällaiset kuvaukset ovat tärkeitä erityisesti kvanttimekaniikassa, koska ne säilyttävät avaruuden $L^2(\mathbb{R})$ rakenteen, samaan tapaan kuin rotaatiot säilyttävät avaruuden $\mathbb{R}^3$ rakenteen.

Lause 7.15 *Olkoot $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ ja merkitään niiden Fourier'n muunnoksia $\widehat{f}$ ja $\widehat{g}$. Tällöin $\widehat{f}, \widehat{g} \in L^2(\mathbb{R})$, ja pätee*

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)^* f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(p)^* \widehat{f}(p)\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}, \quad \text{ja} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(p)\right|^2 \frac{\mathrm{d}p}{2\pi}, \tag{7.17}$$

jotka voidaan myös lyhentää kaavoiksi

$$\langle g|f\rangle = \frac{1}{2\pi}\left\langle \widehat{g}\middle|\widehat{f}\right\rangle \quad \text{ja} \quad \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\left\|\widehat{f}\right\|^2 .$$

TODISTUS Tulos on suoraviivaisinta johtaa käyttämällä käänteismuunnoskaavaa ja tekemällä sen jälkeen integrointijärjestyksen vaihto Plancherelin kaavan vasemmalle puolelle. Koska Parsevalin kaava on suora seuraus Plancherelin kaavasta sijoituksella $g = f$, riittää tämä todistukseen. Käänteismuunnoskaavan mukaan

$$f(x) = (\mathcal{F}^{-1}\widehat{f})(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\frac{\mathrm{d}p}{2\pi},$$

joten

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)^* f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)^*\widehat{f}(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(p)\int_{-\infty}^{\infty}\left(g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\right)^*\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}p}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(p)\widehat{g}(p)^*\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}.\end{aligned}$$

Näin ollen Placherelin kaava pätee.

(MAT) Lasku on matemaattisesti "oikein" sellaisenaan kaikille funktioille $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, sillä tällöin funktiot ja niiden Fourier'n muunnokset $\widehat{f}, \widehat{g}$ ovat kaikki jatkuvia, itseisesti integroituvia funktioita (tätä tietoa tarvitaan Fubinin lauseen soveltamiseksi integrointijärjestystä vaihdettaessa), ja käänteismuunnoskaava toimii kaikissa pisteissä x. Tämän jälkeen täytyy vielä käyttää tietoa, että Schwartzin funktioiden joukko on tiheä avaruudessa $L^2(\mathbb{R})$, eli jokaista avaruuden $L^2(\mathbb{R})$ funktiota voidaan approksimoida mielivaltaisen tarkasti normissa joukon $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ funktioilla. Tästä seuraa, että sekä Parseval että Plancherel pätevät myös avaruuden $L^2(\mathbb{R})$ funktiolle. □

Esimerkki 7.16 Laske integraalin $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(pa)}{p^2}\mathrm{d}p$ arvo kaikilla vakioilla $a > 0$.

Ratkaisu: Esimerkin 7.7 suorakulmaisen pulssin parillinen jatke on funktio $h(x) = \mathbb{1}_{\{|x|<a\}}$ ja selvästi $h \in L^2(\mathbb{R})$. Sen Fourier'n muunnos voidaan laskea kuten esimerkissä,

$$\widehat{h}(p) = 2\frac{\sin(pa)}{p}.$$

Parsevalin kaavan mukaan pätee siis

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(x)|^2\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{h}(p)\right|^2\frac{\mathrm{d}p}{2\pi} = \frac{4}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(pa)}{p^2}\mathrm{d}p.$$

Näin ollen

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(pa)}{p^2}\mathrm{d}p = \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|h(x)|^2\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_{-a}^{a}1\,\mathrm{d}x = \pi a.$$

7.6 Moniulotteinen Fourier'n muunnos

Aloitetaan kaksiulotteisesta tapauksesta, tavoitteena on etsiä funktion $f(x,y)$, $x,y,\in\mathbb{R}$, Fourier'n muunnos. Oletetaan, että funktio on itseisesti integroituva koko määrittelyjoukkonsa $\mathbb{R}^2$ yli, ja tehdään ensin Fourier'n muunnos sen argumentin x suhteen ja tämän jälkeen argumentin y suhteen. Tällöin voidaan käyttää Fubinin lausetta perustelemaan tulos

$$\widehat{f}(p,q) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qy}\mathrm{d}y\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(px+qy)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Ottamalla tästä käänteismuunnos ensin q:n suhteen ja sen jälkeen p:n suhteen, saadaan tulokseksi (ainakin riittävän säännöllisille funktiolle f)

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(p,q)\mathrm{e}^{\mathrm{i}qy}\frac{\mathrm{d}q}{2\pi}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\frac{\mathrm{d}p}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(p,q)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(px+qy)}\frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{(2\pi)^2}\,.$$

Huomataan, että merkinnät käyvät kömpelöiksi varsinkin, kun ulottuvuuksien määrää tästä lisätään. Otetaan nyt käyttöön seuraavat yleisesti käytetyt lyhennysmerkinnät:

$$\int_{\mathbb{R}^d} F(\boldsymbol{x})\mathrm{d}^d\boldsymbol{x} := \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} F(x_1,x_2,\ldots,x_d)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_d\,,$$

jossa iteroidaan d kertaa integrointia reaaliakselin yli. Jos F on itseisesti integroituva, vastaa tämä Fubinin lauseen mukaan samaa kuin, jos tässä integroitaisiin suoraan vasemmalla puolella oleva d-ulotteinen integraali koko joukon $\mathbb{R}^d$ yli. Huomataan lisäksi, että yllä eksponentissa olevaa termiä voi yksinkertaistaa kirjoittamalla se $\mathbb{R}^2$:n pistetulon avulla,

$$px + qy = (p,q)\cdot(x,y)\,.$$

Päädytään siis seuraaviin määritelmiin d-ulotteiselle Fourier'n muunnokselle.

Määritelmä 7.17 *Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ d-**ulotteinen Fourier'n muunnos** on funktio $\widehat{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, joka määritellään integraalilla*

$$\widehat{f}(\boldsymbol{p}) := \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{d}^d\boldsymbol{x}\,, \qquad \boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^d\,. \tag{7.18}$$

*Vastaavasti määritellään d-**ulotteinen Fourier'n käänteismuunnos** funktiolle $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ integraalilla*

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(\boldsymbol{x}) := \int_{\mathbb{R}^d} g(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\frac{\mathrm{d}^d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^d}\,, \qquad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d\,. \tag{7.19}$$

Esimerkki 7.18 Kun $a > 0$, laske funktion $f(\boldsymbol{x}) := \mathrm{e}^{-a|\boldsymbol{x}|}$, $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$, Fourier'n muunnos.
Ratkaisu: Määritelmän mukaan tarvitsee siis ratkaista integraalin

$$\widehat{f}(\boldsymbol{p}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{-a|\boldsymbol{x}|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{d}^d\boldsymbol{x}$$

arvo, kun $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^3$. Lasketaan integraali käyttäen pallokoordinaatteja (r,θ,φ), joiden z-akseli valitaan samansuuntaiseksi kuin vektori $\boldsymbol{p}$, eli joille $\boldsymbol{p} = p\boldsymbol{e}_z$, $p := |\boldsymbol{p}|$. Tällöin $|\boldsymbol{x}| = r$ ja integrandin pistetulo toteuttaa $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} = p\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{x} = pr\cos\theta$, joten saadaan

$$\widehat{f}(\boldsymbol{p}) = \int_0^{\infty}\mathrm{d}r\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\, r^2\sin\theta\,\mathrm{e}^{-ar-\mathrm{i}pr\cos\theta} = 2\pi\int_0^{\infty}\mathrm{d}r\, r^2\mathrm{e}^{-ar}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\,\sin\theta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pr\cos\theta}\,.$$

Muuttujanvaihdolla $y = \cos\theta$, jolle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta < 0$, kun $0 < \theta < \pi$, saadaan θ-integraalista arvoille $p, r \neq 0$,

$$\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \, \sin\theta \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}pr\cos\theta} = \int_{-1}^1 \mathrm{d}y \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}pry} = \Big/_{-1}^{1} \frac{1}{-\mathrm{i}pr} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}pry} = \frac{\mathrm{i}}{pr}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pr} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}pr}\right).$$

Näin ollen, kun $p \neq 0$,

$$\widehat{f}(\boldsymbol{p}) = 2\pi \int_0^\infty \mathrm{d}r \, r^2 \mathrm{e}^{-ar} \frac{\mathrm{i}}{pr}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pr} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}pr}\right) = \frac{\mathrm{i}2\pi}{p}\left(\int_0^\infty \mathrm{d}r \, r\mathrm{e}^{(-a-\mathrm{i}p)r} - \int_0^\infty \mathrm{d}r \, r\mathrm{e}^{(-a+\mathrm{i}p)r}\right).$$

Osittaisintegroimalla saadaan, kaikille $q \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{d}r \, r\mathrm{e}^{-(a+\mathrm{i}q)r} &= \Big/_0^\infty r \frac{1}{-(a+\mathrm{i}q)} \mathrm{e}^{-(a+\mathrm{i}q)r} - \int_0^\infty \mathrm{d}r \, \frac{1}{-(a+\mathrm{i}q)} \mathrm{e}^{-(a+\mathrm{i}q)r} \\ &= 0 - 0 + \frac{1}{a+\mathrm{i}q} \Big/_0^\infty \frac{1}{-(a+\mathrm{i}q)} \mathrm{e}^{-(a+\mathrm{i}q)r} = \frac{1}{(a+\mathrm{i}q)^2}.\end{aligned}$$

Sijoittamalla tämä tulos kahdesti aiempaan kaavaan, tulee lopputulokseksi, kun $p \neq 0$,

$$\widehat{f}(\boldsymbol{p}) = \frac{\mathrm{i}2\pi}{p}\left(\frac{1}{(a+\mathrm{i}p)^2} - \frac{1}{(a-\mathrm{i}p)^2}\right) = \frac{\mathrm{i}2\pi}{p} \frac{(a-\mathrm{i}p)^2 - (a+\mathrm{i}p)^2}{(a+\mathrm{i}p)^2(a-\mathrm{i}p)^2} = \frac{\mathrm{i}2\pi}{p} \frac{-\mathrm{i}4ap}{(a^2+p^2)^2} = \frac{8\pi a}{(a^2+p^2)^2}.$$

Jos $p = 0$, on $\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \, \sin\theta \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}pr\cos\theta} = 2$, joten

$$\widehat{f}(\boldsymbol{0}) = 4\pi \int_0^\infty \mathrm{d}r \, r^2 \mathrm{e}^{-ar} = \frac{4\pi}{a} \int_0^\infty \mathrm{d}s \left(\frac{s}{a}\right)^2 \mathrm{e}^{-s} = \frac{4\pi}{a^3}\Gamma(3) = \frac{8\pi}{a^3}.$$

Vastaus: Kaikilla $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$ pätee

$$\widehat{f}(\boldsymbol{p}) = \frac{8\pi a}{(a^2+p^2)^2}, \quad p = |\boldsymbol{p}|.$$

Huomautus 7.19

- Luvussa 7.2.1 nähtiin, että reaaliakselilla määritellyn funktion parillisuus periytyi sen Fourier'n muunnokselle. Tämä tulos pätee myös moniulotteiselle Fourier'n muunnokselle, kuten nähdään muuttujanvaihdolla (esim. $\boldsymbol{x}' = -\boldsymbol{x}$) määrittelevien integraalien sisällä:

$$\begin{aligned} f(-\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \text{ kaikilla } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \quad &\Rightarrow \quad \widehat{f}(-\boldsymbol{p}) = \widehat{f}(\boldsymbol{p}) \text{ kaikilla } \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^d, \\ f(-\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x}) \text{ kaikilla } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \quad &\Rightarrow \quad \widehat{f}(-\boldsymbol{p}) = -\widehat{f}(\boldsymbol{p}) \text{ kaikilla } \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

- Edellisessä esimerkissä havaittiin, että Fourier'n muunnos säilytti alkuperäisen funktion rotaatioinvarianssin. Tämä pätee yleisemminkin, eli **jos f on rotaatioinvariantti, on myös $\widehat{f}$ rotaatioinvariantti**. Toisin sanoen, jos $f(R\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ kaikilla rotaatiomatriiseilla $R \in \mathbb{R}^{d\times d}$ ja pisteissä $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, pätee myös $\widehat{f}(R\boldsymbol{p}) = \widehat{f}(\boldsymbol{p})$ kaikilla rotaatiomatriiseilla $R \in \mathbb{R}^{d\times d}$ ja pisteissä $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^d$.

- Jos f on rotaatioinvariantti, löytyy aina funktio $\varphi(r)$, $r \geqslant 0$, jolle $f(\boldsymbol{x}) = \varphi(|\boldsymbol{x}|)$ kaikilla $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$. Koska tällöin myös $\widehat{f}$ on rotaatioinvariantti, löytyy sillekin vastaava funktio $\psi(r)$, $r \geqslant 0$, jolle $\widehat{f}(\boldsymbol{p}) = \psi(|\boldsymbol{p}|)$ kaikilla $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^d$.

- Huomaa, että tällöin **ei** kuitenkaan yleensä päde $\psi = \widehat{\varphi}$: Tapauksen $\varphi(r) = \mathrm{e}^{-ar}$, $a > 0$, Fourier'n muunnos on laskettu yhdessä dimensiossa Esimerkissä 7.5 ja kolmessa dimensiossa Esimerkissä 7.18. Yksiulotteinen tapaus antaa funktion $\psi(p) = \frac{2a}{a^2+p^2}$ ja kolmiulotteinen tapaus funktion $\psi(p) = \frac{8\pi a}{(a^2+p^2)^2}$. Vastaus riippuu siis oleellisesti dimensiosta.

TODISTUS (Lisä) Näytetään vielä lopuksi miten yllä mainitut rotaatioinvarianssiominaisuudet voi johtaa. Olkoon $R \in \mathbb{R}^{d\times d}$ mielivaltainen rotaatiomatriisi. Tällöin sille pätee $R^{-1} = R^T$, joten $R^T R = \mathbb{1}$ = yksikkömatriisi. Näin ollen $1 = \det \mathbb{1} = \det(R^T R) = \det(R^T)\det R = (\det R)^2$, joten $\det R = \pm 1$. Tehdään Fourier'n muunnoksen määrittelevään integraaliin muuttujanvaihto $\boldsymbol{x} = R^T \boldsymbol{y}$, jonka Jacobin determinantti on $|\det R^T| = |\det R| = 1$. Saadaan siis

$$\widehat{f}(\boldsymbol{p}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(R^T\boldsymbol{y})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot(R^T\boldsymbol{y})}\mathrm{d}^d\boldsymbol{y}\,.$$

Koska myös R^T on tällöin rotaatiomatriisi, pätee tässä oletusten mukaan $f(R^T\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{y})$. Toisaalta transpoosin määritelmän mukaan $\boldsymbol{p}\cdot(R^T\boldsymbol{y}) = (R\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{y}$, joten nähdään, että $\widehat{f}(\boldsymbol{p}) = \widehat{f}(R\boldsymbol{p})$. Näin ollen rotaatioinvarianssi säilyy Fourier'n muunnoksessa.

Jos f on rotaatioinvariantti, löytää funktion φ esimerkiksi valitsemalla kullakin $\boldsymbol{x}$ rotaatioksi R jonkin kuvauksen, joka kääntää vektorin $\boldsymbol{x}$ osoittamaan ykkösakselin suuntaan, eli kuvauksen, jolle $R\boldsymbol{x} = (|\boldsymbol{x}|, 0, 0, \ldots) = |\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_1$. Tällöin siis $f(\boldsymbol{x}) = f(R\boldsymbol{x}) = f(|\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_1)$, joten voidaan määritellä $\varphi(r) := f(r\boldsymbol{e}_1)$, josta seuraa siis $f(\boldsymbol{x}) = \varphi(|\boldsymbol{x}|)$ kaikille $\boldsymbol{x}$. □