parillinen ja kirjoitetaan muunnoksen määritelmä uudestaan käyttäen ominaisuutta $\psi_k = \psi_{k-N}$

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}_n &= \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k2\pi\frac{n}{N}}\psi_k = \sum_{k=0}^{N/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k2\pi\frac{n}{N}}\psi_k + \sum_{k=N/2+1}^{N-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k2\pi\frac{n}{N}}\psi_{k-N} \\ &= \sum_{k=0}^{N/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k2\pi\frac{n}{N}}\psi_k + \sum_{k'=-N/2+1}^{-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'+N)2\pi\frac{n}{N}}\psi_{k'} = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k2\pi\frac{n}{N}}\psi_k \,,\end{aligned}$$

sillä $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi n} = 1$, kun $n \in \mathbb{Z}$. Oletetaan nyt, että suurilla $|k|$:n arvoilla ψ_k:n arvot poimitaan jonosta $(\psi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ottamalla indeksejä $-\frac{N}{2} + 1 \leqslant k \leqslant \frac{N}{2}$ vastaavat arvot, ja että alkuperäinen jono on itseisesti summautuva, $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |\psi_k| < \infty$. Tällöin

$$\lim_{N\to\infty} \Big(\widehat{\psi}_n - f\Big(2\pi\frac{n}{N}\Big)\Big) = 0\,,$$

funktiolle

$$f(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,,$$

joka on hyvin määritelty kaikilla $x \in \mathbb{R}$ itseisesti summautuvan sarjan avulla. Tätä funktiota kutsutaan **annetuista kertoimista ψ_k, $k \in \mathbb{Z}$, tehdyn Fourier'n sarjan** määrittelemäksi.

Tässä luvussa tutkitaan yllä määriteltyjen Fourier'n kertoimien käyttäytymistä ja niistä tehtyjä Fourier'n sarjoja. Tarkoituksena on nähdä mitkä diskreetin Fourier'n muunnoksen ominaisuuksista periytyvät myös sarjoille: milloin funktion kertoimien Fourier'n sarja suppenee, milloin muunnokset ovat edelleen toistensa käänteismuunnoksia ja missä mielessä?

6.2 Fourier'n sarja välillä $[0, 2\pi]$

Aloitetaan lisäämällä oletukset, jotka varmistavat, että edellisen johdantoluvun määritelmät varmasti toimivat.

Määritelmä 6.1 (Fourier'n sarja) *Kompleksilukujonon $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ muodostama Fourier'n sarja määritellään pääarvomielessä, kaavalla*

$$S(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} := \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,, \tag{6.6}$$

*kaikissa niissä pisteissä $x \in \mathbb{R}$, joissa raja-arvo on olemassa. Jos raja-arvo löytyy, sanotaan, että **Fourier'n sarja suppenee pisteessä** x.*

Määritelmästä seuraa suoraan, että jos $S(x)$ on määritelty, on myös $S(x + 2\pi m)$, $m \in \mathbb{Z}$, määritelty ja sille pätee $S(x+2\pi m) = S(x)$. Näin ollen kaavan (6.6) Fourier'n sarjan määrittelemä funktio S on aina **2π-periodinen**. Alla on myös annettu erikoistapaus, jossa Fourier'n sarja suppenee kaikkialla ja määrittelee jatkuvan funktion. *Jatkuvat periodiset funktiot ovat aina myös rajoitettuja*, sillä ne saavuttavat maksiminsa ja miniminsä jossain periodisuusvälin pisteessä (`https://en.wikipedia.org/wiki/Extreme_value_theorem`).

Lause 6.2 *Olkoon $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ **itseisesti suppeneva** kompleksilukujono,*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty\,.$$

*Tällöin Fourier'n sarja (6.6) suppenee itseisesti kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja määrittelee **jatkuvan** funktion $S : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.*

Todistus Koska $|e^{ikx}| = 1$, kun $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$, oletuksista seuraa suoraan, että kaavan (6.6) sarja suppenee itseisesti ja toteuttaa Weierstrassin M-testin koko reaaliakselilla, majoranttina jono $(|c_k|)$. Erityisesti arvojen $k < 0$ ja $k > 0$ muodostamat sarjatkin suppenevat erikseen, joten myös kaavan (6.6) raja-arvo suppenee kohti sarjan antamaa kompleksilukua. $S(x)$ on siis hyvin määritelty kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Toisaalta, koska jokainen funktioista $x \mapsto c_k e^{ikx}$ on jatkuva kiinteällä indeksillä k ja jono toteuttaa M-testin, periytyy jatkuvuus myös sarjan summalle, eli funktiolle $S(x)$ (ks. Luku 2.2.1). □

Määritelmä 6.3 (2π-periodisen funktion Fourier'n kertoimet) *Oletetaan, että $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on 2π-**periodinen funktio**, eli $f(x+2\pi) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, ja se on itseisesti integroituva välillä $[0, 2\pi]$, eli*

$$\int_0^{2\pi} |f(x)| dx < \infty .$$

Tällaisen funktion Fourier'n kertoimet muodostavat kompleksilukujonon $(\widehat{f}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, jonka alkiot määritellään itseisesti suppenevina integraaleina,

$$\widehat{f}_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx , \qquad k \in \mathbb{Z} . \tag{6.7}$$

*Näiden kertoimien muodostaman jonon $(\widehat{f}_k)$ Fourier'n sarjaa kutsutaan funktion f **Fourier'n sarjaesitykseksi**.*

Huomautus 6.4

- Kertoimien määritelmässä (6.7) voidaan integrointiväliä siirtää vapaasti, eli integroida minkä tahansa välin $[y, y+2\pi]$, $y \in \mathbb{R}$, yli, sillä oletuksista seuraa, että *integrandi on 2π-periodinen* (jätetään asian todistaminen harjoitustehtäväksi). Esimerkiksi tällöin pätee

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx , \qquad k \in \mathbb{Z} . \tag{6.8}$$

Sopivasti tulkittuna ovat nämä muunnokset itse asiassa edelleen toistensa käänteismuunnoksia. Aloitetaan erikoistapauksesta, jossa käänteismuunnos toimii jokaisessa pisteessä.

Lause 6.5 *Oletetaan, että $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on **jatkuva** 2π-periodinen funktio ja oletetaan, että sen Fourier'n kertoimien muodostama sarja suppenee itseisesti, eli*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \widehat{f}_k \right| < \infty .$$

*Tällöin funktion f Fourier'n sarjaesitys suppenee **jokaisessa pisteessä** kohti funktiota f:*

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k e^{ikx} , \qquad x \in \mathbb{R} .$$

Todistus Lauseen 6.2 perusteella jonon $(\widehat{f}_k)$ Fourier'n sarja suppenee siis itseisesti kaikkialla ja määrittelee jatkuvan periodisen funktion $S(x)$. Lasketaan tämän funktion Fourier'n kertoimet,

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(x) e^{-ikx} dx = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_{k'} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k'-k)x} dx ,$$

jossa summausjärjestyksen ja integroinnin vaihdon voi perustella itseisellä summautuvuudella Luvun 2.2.1 tuloksen (2) tapaan. Jos tässä $k' - k \neq 0$, saadaan

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k'-k)x} dx = \Big/_0^{2\pi} \frac{1}{i(k'-k)} e^{i(k'-k)x} = \frac{1}{i(k'-k)} \left(e^{i(k'-k)2\pi} - 1 \right) .$$

Näin ollen, kun $k, k' \in \mathbb{Z}$, on myös $k' - k$ kokonaisluku, ja saadaan tulos

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k'-k)x} dx = \begin{cases} 0\,, & \text{jos } k' - k \neq 0\,, \\ 1\,, & \text{jos } k' - k = 0\,, \end{cases} \tag{6.9}$$

eli integraalin arvo on nolla, jos $k' \neq k$, ja se on yksi, jos $k' = k$. Näin ollen $c_k = \widehat{f}_k$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$, eli jatkuvilla funktioilla f ja S on sama Fourier'n sarja. Todistus siitä, että tästä seuraa $f(x) = S(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, jätetään matematiikan Fourier-analyysin kursille. □

Huomautus 6.6

- Yllä olevista tuloksista seuraa itse asiassa myös, että jos funktion $f(x)$ Fourier'n sarja on *itseisesti summautuva* voi sen "korvata" jatkuvalla funktiolla $S(x)$ määrittelemällä sen uudelleen "muutamassa" pisteessä.[1]

- Tyypillisesti epäjatkuvien funktioiden Fourier'n sarjat eivät olekaan itseisesti summautuvia, vaan ne suppenevat vain kaavan (6.6) pääarvomielessä (ks. seuraava Esimerkki).

- Näissä tuloksissa on tärkeää, että **periodinen funktio f on jatkuva myös päätepisteissä** 0 **ja** 2π, eli f:n jatkuvuusoletus vaatii myös, että $\lim_{\varepsilon\to 0^+} f(2\pi-\varepsilon) = f(2\pi) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} f(2\pi+\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} f(\varepsilon) = f(0)$, eli funktion täytyy olla oikealta jatkuva pisteessä 0, vasemmalta jatkuva pisteessä 2π, ja lisäksi $f(0) = f(2\pi)$.

Huomautus 6.7 Kun pyydetään laskemaan **reaaliakselilla määritellyn funktion f Fourier'n sarja jollain välillä** $[a, b]$, $b = a + L$ ja $L > 0$, tarkoituksena on etsiä kerroinjono, joiden muodostama L-periodinen Fourier'n sarja approksimoi mahdollisimman hyvin funktiota f välillä $[a, b]$. Tämä saadaan aikaan seuraavasti (tämän luvun funktioille periodisuusvälin pituus $L = 2\pi$):

1. Poistetaan toinen välin päätepisteistä (ei ole väliä kumpi), ja tutkitaan esimerkiksi väliä $I :=]a, b]$.

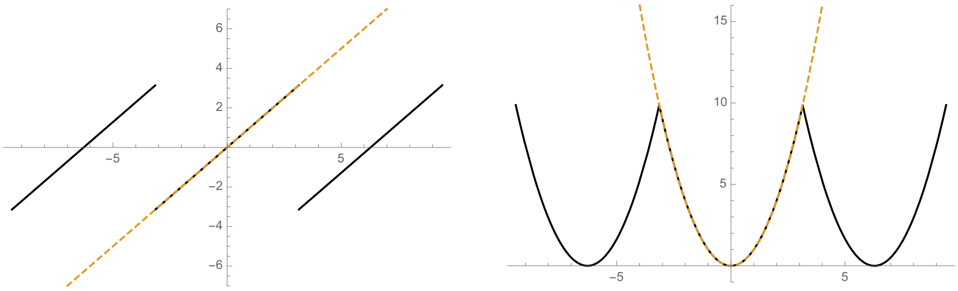
2. Aloitetaan määrittelemällä funktio g funktion f rajoittumana välille I, eli asetetaan $g(x) := f(x)$, kun $x \in I$.

3. Jatketaan funktio g periodisesti koko reaaliakselille, eli määritellään $g(x + mL) := g(x) = f(x)$, aina kun $x \in I$, $m \in \mathbb{Z}$, jossa $L = b - a > 0$ on välin pituus.

4. Käytetään L-periodisen funktion $g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, Fourier'n sarjaa $S(x)$.

Tällöin nimittäin kaikissa pisteissä $x \in I$, joissa $S(x) = g(x)$, pätee automaattisesti myös $S(x) = f(x)$, eli saatu sarja esittää funktiota f juuri välin I pisteissä.

[1](MAT) Tarkemmin: jatkuva funktio S yhtyy tällöin alkuperäiseen funktioon f melkein kaikkialla, lukuun ottamatta Lebesguen mitan suhteen nollamittaista joukkoa.



Kuva 6.1: Kahden funktion $f(x)$ (oranssi katkoviiva) periodiset jatkeet $g(x)$ (musta viiva) kahdessa eri tapauksessa väliltä $]-\pi,\pi]$: (*vasen kuva*) $f(x)=x$, (*oikea kuva*) $f(x)=x^2$.

Esimerkki 6.8 Laske funktion $f(x)=x$ Fourier'n sarja välillä $[-\pi,\pi]$.
Ratkaisu: Rakennetaan ensin f:n 2π-periodinen jatke g kuten Huomautuksessa 6.7 käyttäen väliä $I=\,]-\pi,\pi]$ – Kuvassa 6.1 vasemmalla puolella on annettu funktioiden f ja g kuvaajat. Lasketaan tämän jälkeen g:n Fourier'n kertoimet $\widehat{g}_k$ ja merkitään näitä yksinkertaisuuden vuoksi c_k:lla. Koska g on 2π-periodinen, voidaan c_k laskea myös integraaleja (6.8) käyttäen,

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x\,.$$

Jos $k\neq 0$, on funktion $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$ integraalifunktio $\frac{1}{-\mathrm{i}k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$. Tällöin voidaan yllä oleva integraali laskea osittaisintegroimalla,

$$\begin{aligned}c_k&=\frac{1}{2\pi}\left(\Big/_{-\pi}^{\pi} x\frac{1}{-\mathrm{i}k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{-\mathrm{i}k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x\right)=\frac{\mathrm{i}}{2\pi k}\left(\pi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi}-(-\pi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi}-\Big/_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{-\mathrm{i}k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right)\\&=\frac{\mathrm{i}}{2k}\left((-1)^{-k}+(-1)^{k}\right)=\mathrm{i}\frac{(-1)^k}{k}\,,\end{aligned}$$

sillä $\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\pi}=(-1)^k=(-1)^{-k}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\pi}$ aina, kun $m\in\mathbb{Z}$. Lisäksi, kun $k=0$, saadaan

$$c_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\Big/_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}x^2=0\,.$$

Näin ollen funktion g Fourier's sarja, joka on sama kuin etsitty funktion f Fourier'n sarja välillä $[-\pi,\pi]$, kuuluu

$$S(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}=\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\mathrm{i}\frac{(-1)^k}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,.$$

Huomataan, että tämä sarja *ei* suppene itseisesti, sillä sen itseisarvojen muodostama sarja on $\sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{\infty}\frac{1}{|k|}=\infty$. Näin ollen täytyy Fourier'n sarja määritellä käyttäen kaavan (6.6) raja-arvoa, eikä ole vielä selvää milloin se suppenee.

Sarjaa voi vielä sieventää muotoon, josta näkyy esimerkiksi se, että sarja tuottaa supetessaan aina reaalisia arvoja: nyt

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{k=-N\\k\neq 0}}^{N}\mathrm{i}\frac{(-1)^k}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}&=\sum_{k=1}^{N}\mathrm{i}\frac{(-1)^k}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}+\sum_{k=-N}^{-1}\mathrm{i}\frac{(-1)^k}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}=\sum_{k=1}^{N}\mathrm{i}\frac{(-1)^k}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}+\sum_{k'=1}^{N}\mathrm{i}\frac{(-1)^{-k'}}{-k'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'x}\\&=\sum_{k=1}^{N}\mathrm{i}\frac{(-1)^k}{k}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right)=\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{k+1}}{k}2\sin(kx)\,.\end{aligned}$$

Näin ollen, kun otetaan tässä raja $N \to \infty$, saadaan sarja

$$S(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx)\,,$$

jonka suppenemista voi tarkastella käyttäen sarjojen tavallista suppenemista, kuten Luvussa 2.1 määriteltiin. Itse asiassa kohta esitettävän Dirichlet'n lauseen perusteella nähdään, että sarja suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$, ja se esittää funktiota $f(x) = x$ pisteissä $-\pi < x < \pi$. Päätepisteissä esitys ei enää kuitenkaan päde, vaan saadaan $S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2} = \frac{-\pi+\pi}{2} = 0$.

Lause 6.9 (Dirichlet'n lause) *Oletetaan, että f on 2π-periodinen reaalifunktio, joka toteuttaa **Dirichlet'n ehdot**:*

1. *Funktiolla f on korkeintaan äärellisen monta epäjatkuvuuspistettä välillä $[0, 2\pi]$, ja jokaisessa epäjatkuvuuspisteessä x_0 löytyy funktiolle sekä vasemmalta että oikealta otettu raja-arvo, eli luvut*

$$f(x_0^-) := \lim_{x \to x_0^-} f(x) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)\,, \tag{6.10}$$

$$f(x_0^+) := \lim_{x \to x_0^+} f(x) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)\,. \tag{6.11}$$

2. *Funktiolla f on vain äärellinen määrä paikallisia ääriarvopisteitä (eli lokaaleja maksimeja ja minimejä) välillä $[0, 2\pi]$. (Tämä tarkoittaa sitä, että f ei saa heilahdella rajattomasti.)*

Tällöin funktion f Fourier'n sarja

$$S(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k e^{ikx}\,,$$

suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja sillä on samat Fourier'n kertoimet kuin funktiolla f, eli $\widehat{S}_k = \widehat{f}_k$. Lisäksi

1. *S **esittää funktiota f kaikissa sen jatkuvuuspisteissä**, eli $S(x) = f(x)$, jos x on piste, jossa f on jatkuva.*

2. *Funktion f **epäjatkuvuuspisteessä x_0 saa S arvon epäjatkuvuuden muodostaman hypyn puolivälistä**,*

$$S(x_0) = \frac{1}{2}\left(f(x_0^-) + f(x_0^+)\right)\,.$$

Todistus Tämän lauseen todistus tehdään matematiikan Fourier-analyysin kurssilla. Wikipediasta (`https://en.wikipedia.org/wiki/Dirichlet_conditions`) löytyy myös lisää yksityiskohtia. □

Huomautus 6.10

- Huomaa, että lause koskee myös funktion arvoja välin päätepisteissä, eli jos $f(2\pi^-) \neq f(0^+)$, on $S(0) = S(2\pi) = \frac{1}{2}\left(f(2\pi^-) + f(0^+)\right)$. Tämä tilanne tulee usein vastaan, kun lasketaan jatkuvalle funktiolle Fourier'n sarjaesityksiä jollain suljetulla välillä, ks. Esimerkki 6.8.

- Dirichlet'n lausetta voi soveltaa myös, kun funktio f on *kompleksiarvoinen*. Tällöin vaaditaan, että sekä $\operatorname{Re} f$ että $\operatorname{Im} f$ toteuttavat molemmat erikseen Dirichlet'n ehdot.

6.3 Trigonometriset sarjat

Jos funktiolla f on Fourier'n sarjaesitys, on sillä aina myös esitys trigonometristen funktioiden $\cos(kx)$ ja $\sin(kx)$ avulla. Nimittäin Eulerin kaavasta seuraa, että

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} &= \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}_k \left(\cos(kx) + \mathrm{i}\sin(kx)\right) \\
&= \widehat{f}_0 + \sum_{k=1}^{N} \widehat{f}_k \cos(kx) + \sum_{k=-N}^{-1} \widehat{f}_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{N} \mathrm{i}\widehat{f}_k \sin(kx) + \sum_{k=-N}^{-1} \mathrm{i}\widehat{f}_k \sin(kx) \\
&= \widehat{f}_0 + \sum_{k=1}^{N} \widehat{f}_k \cos(kx) + \sum_{k'=1}^{N} \widehat{f}_{-k'} \cos(-k'x) + \sum_{k=1}^{N} \mathrm{i}\widehat{f}_k \sin(kx) + \sum_{k'=1}^{N} \mathrm{i}\widehat{f}_{-k'} \sin(-k'x) \\
&= \widehat{f}_0 + \sum_{k=1}^{N} \left[\left(\widehat{f}_k + \widehat{f}_{-k}\right) \cos(kx) + \mathrm{i}\left(\widehat{f}_k - \widehat{f}_{-k}\right) \sin(kx) \right],
\end{aligned}$$

jossa on käytetty hyväksi kosinin parillisuutta ja sinin parittomuutta. Näin ollen, jos Fourier'n sarja suppenee pisteessä x, suppenee myös vastaava trigonometrinen sarja pisteessä x, ja pätee

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \widehat{f}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right],$$

kun määritellään

$$a_k = \widehat{f}_k + \widehat{f}_{-k}, \qquad b_k = \mathrm{i}\left(\widehat{f}_k - \widehat{f}_{-k}\right), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Nämä kertoimet voi myös laskea suoraan integraalien avulla, kuten Fourier'n sarjan kertoimet (6.7). Lähetään liikkeelle funktion f periodisuuteen perustuvasta symmetrisestä integrointivälistä (6.8), jonka mukaan yllä on kaikilla $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
a_k &= \widehat{f}_k + \widehat{f}_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \mathrm{d}x, \\
b_k &= \mathrm{i}\left(\widehat{f}_k - \widehat{f}_{-k}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{i}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx).
\end{aligned}$$

Käytetäänkin tämän jälkeen yllä olevaa integraalia määrittelemään myös a_k, kun $k = 0$, eli asetetaan

$$a_0 := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{d}x = 2\widehat{f}_0 = \widehat{f}_0 + \widehat{f}_{-0}.$$

Samoin voidaan määritellä myös $b_0 = 0$. Ollaan siis todistettu seuraava tulos

Lause 6.11 *Oletetaan, että $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on 2π-**periodinen funktio**, joka on itseisesti integroituva välillä $[0, 2\pi]$. Kun $k \in \mathbb{N}_0$, määritellään*

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \mathrm{d}x, \qquad b_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx). \tag{6.12}$$

*Näitä kertoimia vastaava **trigonometrinen sarja** pisteessä x on*

$$S(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right], \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{6.13}$$

Tämä sarja suppenee, jos ja vain jos vastaava Fourier'n sarja kertoimilla $(\widehat{f}_k)$ suppenee, ja tällöin sarjat suppenevat kohti samaa arvoa. Mikäli funktio f toteuttaa Dirichlet'n ehdot, on $S(x) = f(x)$ jokaisessa pisteessä x, jossa f on jatkuva.

Trigonometrinen sarja on kätevä erityisesti, jos f on reaaliarvoinen funktio tai jos se on parillinen tai pariton. Nimittäin, jos $f(x) \in \mathbb{R}$ kaikilla x, on määritelmien (6.12) integrandit reaaliarvoisia, joten pätee $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, ja trigonometrinen sarja (6.13) sisältää vain reaalisia termejä. Sen sijaan funktion f Fourier'n kertoimille saadaan tällöin vain ominaisuus

$$\widehat{f}_k^* = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x\right)^* = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right)^* \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = \widehat{f}_{-k}\,.$$

Tästä ominaisuudesta seuraa myös jo itsessään, että Fourier'n sarja $S(x)$ antaa jokaisessa suppenemispisteessään reaalisen arvon: jos $\widehat{f}_k^* = \widehat{f}_{-k}$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$ ja Fourier'n sarja suppenee pisteessä x, pätee

$$S(x)^* = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right)^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\widehat{f}_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right)^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_{-k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_{k'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x} = S(x)\,,$$

eli tällöin $S(x) \in \mathbb{R}$.

Jos taas f on parillinen tai pariton, on puolet trigonometrisen sarjan kertoimista nollia integrandin parillisuusominaisuuksiin nojaten, ks. Luku 5.5.2. Esimerkiksi, jos f on *parillinen*, on myös funktio $f(x)\cos(kx)$ parillinen, mutta funktio $f(x)\sin(kx)$ on pariton, joten tällöin saadaan

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)\mathrm{d}x\,, \quad b_k = 0 \quad \Rightarrow \quad S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx)\,. \tag{6.14}$$

Vastaavasti, kun f on *pariton*, pätee

$$a_k = 0\,, \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin(kx)\,. \tag{6.15}$$

Esimerkin 6.8 periodinen jatkehan on pariton funktio, joten tämä selittää, miksi sen Fourier'n sarja oli kirjoitettavissa pelkästään funktioiden $\sin(kx)$ avulla.

Taulukossa 6.1 on yhteenveto yllä johdetuista trigonometristen ja Fourier'n sarjojen perusominaisuuksista.

Esimerkki 6.12 Laske funktion $f(x) = x^2$ trigonometrinen sarja välillä $[-\pi, \pi]$.
Ratkaisu: Olkoon g funktion f periodinen jatke väliltä $]-\pi, \pi]$. Tällöin $g(x) = f(x) = f(-x) = g(-x)$, kun $-\pi < x < \pi$, joten g on parillinen funktio sen trigonometriset kertoimet määrittelevissä integraaleissa (6.12). Lisäksi g perii f:n jatkuvuuden kaikkiin näihin pisteisiin ja toisaalta päätepisteissä pätee $g((-\pi)^+) = (-\pi)^2 = \pi^2 = g(\pi) = g(-\pi)$, joten g on jatkuva koko reaaliakselilla ja toteuttaa Dirichlet'n ehdot. (Kuvassa 6.1 oikealla puolella on annettu funktioiden f ja g kuvaajat.) g:n parillisuudesta seuraa, että sen trigonometrisille kertoimille on $b_k = 0$, kaikilla $k \in \mathbb{N}_0$, ja

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\cos(kx)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(kx)\mathrm{d}x\,.$$

Näin ollen

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\Big/_0^{\pi} \frac{1}{3}x^3 = 2\frac{\pi^2}{3}\,,$$

Taulukko 6.1: Yhteenveto 2π-periodisen funktion f Fourier'n ja trigonometristen sarjojen $S(x)$ perusominaisuuksista, kun funktio f on esitettävissä sarjan S avulla, eli toteuttaa esimerkiksi Dirichlet'n ehdot.

- S on reaaliarvoinen, jos ja vain jos $\widehat{f}_k^* = \widehat{f}_{-k}$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$.
- S on reaaliarvoinen, jos ja vain jos $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ kaikilla $k \in \mathbb{N}_0$.
- Jos f on parillinen, on $b_k = 0$ kaikilla k.
- Jos f on pariton, on $a_k = 0$ kaikilla k.

ja, kun $k \in \mathbb{N}$, voidaan integraali laskea kaksi kertaa osittaisintegroimalla,

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}a_k &= \int_0^\pi x^2\cos(kx)\mathrm{d}x = \Big/_0^\pi x^2\frac{1}{k}\sin(kx) - \int_0^\pi 2x\frac{1}{k}\sin(kx)\mathrm{d}x \\ &= 0 - \frac{2}{k}\left(\Big/_0^\pi x\frac{-1}{k}\cos(kx) - \int_0^\pi \frac{-1}{k}\cos(kx)\mathrm{d}x\right) = \frac{2}{k^2}\left(\pi\cos(k\pi) - 0 - \Big/_0^\pi \frac{1}{k}\sin(kx)\right) \\ &= \frac{2}{k^2}\pi(-1)^k\,.\end{aligned}$$

Näin ollen $a_k = (-1)^k\frac{4}{k^2}$, joten funktion g trigonometriseksi sarjaksi saadaan

$$S(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos(kx)\,.$$

Huomataankin, että päinvastoin kuin Luvun ensimmäisessä esimerkissä, on tämä sarja itseisesti suppeneva, sillä $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \infty$, joka on sopusoinnussa g jatkuvuuden kanssa. Lausetta 6.5 tai Dirichlet'n lausetta soveltamalla saadaan siis $S(x) = x^2$, kun $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, sillä g on jatkuva kaikkialla, mukaan lukien välin päätepisteet. Erityisesti $S(0) = 0$, joten tämän Fourier'n sarjan avulla saadaan ratkaistua erään sarjan eksakti arvo:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}\,.$$

Toisaalta, kun $x = \pi$, on sarjassa $\cos(k\pi) = (-1)^k$, joten sen avulla ratkeaa myös eräs Riemannin ζ-funktion eksakti arvo:

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{4}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

6.4 L-periodisen funktion Fourier'n sarjaesitykset

Yllä tarkasteltiin pelkästään 2π-periodisen funktion esittämistä Fourier'n sarjojen avulla. Entä jos funktio on periodinen $f(x + L) = f(x)$, kaikilla x, mutta sen periodin pituus L ei olekaan 2π? Vastaavasti, mitä tehdä, jos ei kysytäkään funktion Fourier'n sarjaesitystä 2π:n mittaisella välillä, vaan jollain yleisellä välillä $[a, a + L]$?

Itse asiassa kaikki edellä olevat tulokset voi helposti yleistää myös koskemaan näitä tapauksia: riittää parametrisoida funktion f argumentti uudelleen siten, että periodisuusväli $[a, a+L]$ saadaan uuden parametrin välistä $[0, 2\pi]$. Käytetään tähän lineaarista kuvausta $M(y) = \alpha + \beta y$, ja etsitään reaalivakiot α, β, joilla $M(0) = a$ ja $M(2\pi) = a + L$. Tästä saadaan ratkaisuksi $\alpha = a$ ja $\beta = \frac{L}{2\pi}$, eli kuvaus $M(y) = a + \frac{L}{2\pi}y$. Määritellään tämän jälkeen $g(y) := f(M(y))$, eli

$$g(y) = f\left(a + \frac{L}{2\pi}y\right), \quad y \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad g(y + 2\pi) = f\left(a + \frac{L}{2\pi}y + L\right) = f\left(a + \frac{L}{2\pi}y\right) = g(y)\,,$$

eli g on tällöin todellakin 2π-periodinen funktio, jos f on L-periodinen funktio.

Huomataan myös, että jos f toteuttaa Dirichlet'n ehdot, kun niissä korvataan väli $[0, 2\pi]$ välillä $[a, a + L]$, toteuttaa myös g Dirichlet'n ehdot standardivälillä. Tässä tapauksessa sen Fourier'n sarja suppenee epäjatkuvuuspisteitä lukuun ottamatta kohti funktiota g, eli pätee

$$f\left(a + \frac{L}{2\pi}y\right) = g(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{g}_k e^{iky}$$

jos y on funktion g jatkuvuuspiste. Näin ollen, jos x on funktion f jatkuvuuspiste on $y = \frac{2\pi}{L}(x - a)$ funktion g jatkuvuuspiste, joten pätee myös

$$f(x) = g\left(\frac{2\pi}{L}(x - a)\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{g}_k e^{ik\frac{2\pi}{L}(x-a)}\,.$$

Tässä olevat funktion g Fourier'n kertoimet on määritelty integraalilla

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(y)e^{-iky}dy = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a + \frac{L}{2\pi}y\right)e^{-iky}dy = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+L} f(x)e^{-ik\frac{2\pi}{L}(x-a)}\frac{2\pi}{L}dx\,.$$

Vastaava muuttujanvaihto voidaan tehdä myös funktion g trigonometristen kertoimien määritelmään ja esitykseen. Tästä saadaan ensin tulos siitä, miten annettu funktio f voidaan esittää mielivaltaisella reaaliakselin välillä Fourier'n sarjan avulla.

Lause 6.13 *Oletetaan, että $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on itseisesti integroituva välillä $[a, a + L]$, jossa $a \in \mathbb{R}$ ja $L > 0$. Määritellään*

$$\widehat{f}_k := \frac{1}{L}\int_a^{a+L} f(x)e^{-ik\frac{2\pi}{L}(x-a)}dx\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,, \tag{6.16}$$

$$a_k := \frac{2}{L}\int_a^{a+L} f(x)\cos\left(k\frac{2\pi}{L}(x - a)\right)dx\,, \quad b_k := \frac{2}{L}\int_a^{a+L} f(x)\sin\left(k\frac{2\pi}{L}(x - a)\right)dx\,, \quad k \in \mathbb{N}_0\,.$$

Tällöin funktion f Fourier'n sarja välillä $[a, a + L]$ kuuluu

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k e^{ik\frac{2\pi}{L}(x-a)} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos\left(k\frac{2\pi}{L}(x - a)\right) + b_k\sin\left(k\frac{2\pi}{L}(x - a)\right)\right]\,. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Jos f toteuttaa Dirichlet'n ehdot, on $S(x) = f(x)$ jokaisessa sen L-periodisen jatkeen jatkuvuuspisteessä $x \in [a, a + L]$.

- Huomaa, että välin pituus L ja "kehityspiste" a vaikuttaa sekä kertoimien laskemiseen että sarjaesityksiin. Jos halutaan korostaa sitä, millä välillä Fourier'n kertoimet on laskettu, voi yllä olevaa kerrointa $\widehat{f}_k$ merkitä esimerkiksi $\widehat{f}_{k;L}$ tai $\widehat{f}_{k;[a,a+L]}$.

- Yllä on käytetty määritelmässä "päätepistekantaa", jossa jokaisella $k \in \mathbb{Z}$ sarjan eksponenttifunktio saa aina arvon yksi välin päätepisteissä $x = a$ ja $x = a + L$. Tämä kanta on kätevin varsinkin, jos funktion tiedetään toteuttavan jotain lisäehtoja päätepisteissä (ks. Luku 6.4.1). Muitakin mahdollisuuksia on: esimerkiksi aiemmin käytettiin sarjassa välillä $[-\pi, \pi]$ funktioita e^{ikx} eikä $e^{ik(x+\pi)}$ kuten tässä. Fourier'n sarjalle kehityspisteen a valinta on lähinnä makuasia, sillä sen siirto vaikuttaa vain kertoimien vaiheeseen, esimerkiksi

$$\frac{1}{L}\int_a^{a+L} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\frac{2\pi}{L}(x-a)}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{2\pi}{L}a}\frac{1}{L}\int_a^{a+L} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\frac{2\pi}{L}x}\mathrm{d}x\,.$$

  Trigonometrisille kertoimille tästä seuraa kuitenkin jo hieman monimutkaisempi muunnoskaava, ja erityisesti seuraavan luvun kosini- ja sinisarjoja rakennettaessa on tärkeää käyttää niissä annettua päätepistekantaa.

- Lisätietoa yleisistä Fourier'n sarjoista löytyy Wikipediasta (`https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_series`).

Esimerkki 6.14 Laske funktion $f(x) = x$ trigonometrinen sarja välillä $[0, 1]$.
Ratkaisu: Sijoitetaan Lauseeseen 6.13 $a = 0$ ja $L = 1$, josta saadaan kertoimiksi

$$a_k = 2\int_0^1 x\cos(k2\pi x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad b_k = 2\int_0^1 x\sin(k2\pi x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Näin ollen

$$a_0 = 2\int_0^1 x\mathrm{d}x = 2\Big/_0^1 \frac{1}{2}x^2 = 1\,,$$

ja, kun $k \neq 0$, voidaan taas osittaisintegroida

$$a_k = 2\int_0^1 x\cos(k2\pi x)\,\mathrm{d}x = 2\Big/_0^1 x\frac{1}{2\pi k}\sin(k2\pi x) - 2\int_0^1 \frac{1}{2\pi k}\sin(k2\pi x)\,\mathrm{d}x = 0\,,$$

$$b_k = 2\Big/_0^1 x\frac{-1}{2\pi k}\cos(k2\pi x) - 2\int_0^1 \frac{-1}{2\pi k}\cos(k2\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{2\pi k}\cos(2\pi k) = -\frac{1}{\pi k}\,.$$

Saadaan siis trigonometrinen sarja

$$S(x) = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k}\sin(2\pi k x)\ ,$$

jolle pätee $S(x) = f(x) = x$, kun $0 < x < 1$, ja $S(0) = S(1) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$. Tätä voi verrata Esimerkin 6.8 sarjaan, joka saa samoja arvoja pisteissä $0 < x < 1$.

6.4.1 Funktion esittäminen kosini- ja sinisarjoina

Funktioita voi esittää Fourier'n ja trigonometristen sarjojen lisäksi käyttäen pelkästään sineistä tai kosineista koostuvia sarjoja. Ideana tässä onkin käyttää yllä mainittuja parillisuusominaisuuksia, joiden mukaan esimerkiksi välin $[-\pi, \pi]$ parillisen funktion trigonometrisen sarjan sinitermien kertoimet ovat kaikki nollia. Näin ollen, jos halutaan esittää funktio f välillä $[a, a + L]$ pelkästään kosinien avulla, onnistuu tämä uudelleenparametrisoimalla tämä väli ensin väliksi $[0, \pi]$, kuten edellä tehtiin, ja sen jälkeen jatkamalla saatu funktio parillisesti arvoille $]-\pi, \pi[$ ja sen jälkeen 2π-periodisesti koko reaaliakselille.

Tarkemmin, käytetään nyt kuvausta $M(y) = \alpha + \beta y$, jolla $M(0) = a$ ja $M(\pi) = a + L$. Tästä saadaan ratkaisuksi $\alpha = a$ ja $\beta = \frac{L}{\pi}$, eli kuvaus $M(y) = a + \frac{L}{\pi}y$. Määritellään tämän jälkeen $g(y) := f(M(y)) = f(a + \frac{L}{\pi}y)$ arvoilla $0 < y < \pi$. Tästä saadaan aikaiseksi funktion g

1. *parillinen periodinen jatke* asettamalla $g(0) := f(a)$, $g(\pi) := g(-\pi) := f(a + L)$, ja $g(y) := g(-y)$, kun $-\pi < y < 0$, ja tämän jälkeen määrittelemällä $g(y + m2\pi) := g(y)$, aina kun $y \in]-\pi, \pi]$, $m \in \mathbb{Z}$;

2. *pariton periodinen jatke* määrittelemällä $g(0) := 0 =: g(\pi)$, ja $g(y) := -g(-y)$, kun $-\pi < y < 0$, ja tämän jälkeen määrittelemällä $g(y + m2\pi) := g(y)$, aina kun $y \in]-\pi, \pi]$, $m \in \mathbb{Z}$. (Huomaa, että parittomuusehdosta $g(-0) = -g(0)$ seuraa, että täytyy valita $g(0) = 0$, ja samoin halutun periodisuuden mukaan on oltava $g(\pi) = g(-\pi) = -g(\pi)$, joten myös $g(\pi) = 0$.)

Ensimmäiselle, parilliselle jatkeelle saadaan tällöin siis kaavasta (6.14) tulos $b_k = 0$ ja

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(y)\cos(ky)\mathrm{d}y = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f\left(a + \frac{L}{\pi}y\right)\cos(ky)\mathrm{d}y = \frac{2}{L}\int_a^{a+L} f(x)\cos\left(k\frac{\pi}{L}(x-a)\right)\mathrm{d}x\,.$$

Tällöin g:n trigonometrinen sarja on

$$S(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(ky)\,.$$

Toiselle, parittomalle jatkeelle saadaan vastaavasti kaavasta (6.15) tulos $a_k = 0$ ja

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(y)\sin(ky)\mathrm{d}y = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f\left(a + \frac{L}{\pi}y\right)\sin(ky)\mathrm{d}y = \frac{2}{L}\int_a^{a+L} f(x)\sin\left(k\frac{\pi}{L}(x-a)\right)\mathrm{d}x\,.$$

Tällöin taas g:n trigonometrinen sarja on

$$S(y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin(ky)\,.$$

Selvästi, jos f toteuttaa Dirichlet'n ehdot välillä $[a, a+L]$, myös g toteuttaa ne. On huomattava kuitenkin, että välin päätepisteihin saattaa tässäkin syntyä odottamattomia epäjatkuvuuskohtia jatkeelle g, joten sen trigonometrisen sarjan arvot näissä päätepisteissä täytyy laskea huolellisesti ja ne voivat riippua siitä käytetäänkö yllä parillista vai paritonta jatketta. Tällöin kuitenkin $f(x) = g(\pi(x-a)/L) = S(\pi(x-a)/L)$ kaikissa funktion f jatkuvuuspisteissä x välin sisällä. Tästä saadaan aikaiseksi kaksi sarjaa, jotka suppenevat kohti funktion f arvoja ainakin jokaisessa pisteessä x, joka on f:n jatkuvuuspiste ja jolle $a < x < a + L$.

Funktion f **kosinisarja** välillä $[a, a + L]$ määritellään

$$S_c(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\left(k\frac{\pi}{L}(x-a)\right)\,, \qquad a_k = \frac{2}{L}\int_a^{a+L} f(x)\cos\left(k\frac{\pi}{L}(x-a)\right)\mathrm{d}x\,, \tag{6.18}$$

ja vastaava **sinisarja** määritellään

$$S_{\mathrm{s}}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\Big(k\frac{\pi}{L}(x-a)\Big)\,, \qquad b_k = \frac{2}{L}\int_a^{a+L} f(x)\sin\Big(k\frac{\pi}{L}(x-a)\Big)\,\mathrm{d}x\,. \tag{6.19}$$

Huomaa kertoimen kaksi ero sinin ja kosinin argumenteissa vastaavaan funktion trigonometriseen sarjaan verrattuna (6.17).

Ollaan siis löydetty jo kolme erilaista tapaa esittää jokin välillä $[a, a+L]$ annettu funktio: Fourier'n/trigonometrinen sarja, kosinisarja ja sinisarja. Se mitä näistä sarjaesityksistä kannattaa käyttää riippuu usein siitä millaisia **reunaehtoja** funktion halutaan toteuttavan välin päätepisteissä. Esimerkin vuoksi oletetaan, että on annettu jokin yllä olevista kolmesta sarjaesityksestä ja että tässä esityksessä *sarja suppenee itseisesti*. Tällöin sarja suppenee kohti jatkuvaa funktiota ja voidaan olettaa, että tämä on sama kuin alkuperäinen funktio f. Päätepisteiden arvot sijoittamalla saadaan tällöin seuraavat tulokset:

1. Fourier'n sarja (ja siis myös trigonometrinen sarja) suppenee parhaiten, jos funktio on jatkuva ja *periodinen* välin päätepisteissä, eli funktioille f, joille pätee $f(a) = f(a+L)$. Päätepisteen arvo voi tässä olla mielivaltainen.

2. Sinisarja suppenee parhaiten, jos funktio f on jatkuva ja toteuttaa ns. **Dirichlet'n reunaehdot** välin päätepisteissä, eli jos se häviää reunalla: $f(a) = 0 = f(a+L)$.

3. Kosinisarja suppenee parhaiten, jos funktio f on jatkuva, periodinen ja toteuttaa ns. **Neumannin reunaehdot** välin päätepisteissä, eli jos sen derivaatta häviää reunalla: $f'(a) = 0 = f'(a+L)$.[2]

Sopivalla esityksen valinnalla voi joskus myös parantaa saadun sarjan suppenemista, kuten seuraava esimerkki osoittaa.

Esimerkki 6.15 Laske funktion $f(x) = x$ kosinisarja välillä $[0, 1]$.
Ratkaisu: Kosinisarjan kertoimiksi saadaan siis

$$a_k = 2\int_0^1 x\cos(k\pi x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Näin ollen kuten Esimerkissä 6.14, $a_0 = 1$ ja, kun $k \neq 0$, voidaan taas osittaisintegroida

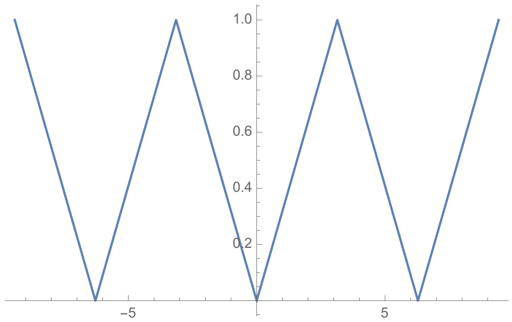
$$\begin{aligned} a_k &= 2\int_0^1 x\cos(k\pi x)\,\mathrm{d}x = 2\Big/_0^1 x\frac{1}{k\pi}\sin(k\pi x) - 2\int_0^1 \frac{1}{k\pi}\sin(k\pi x)\,\mathrm{d}x \\ &= 0 - 2\frac{1}{k\pi}\Big/_0^1 \frac{-1}{k\pi}\cos(k\pi x) = \frac{2}{k^2\pi^2}((-1)^k - 1) = \begin{cases} -\frac{4}{k^2\pi^2}\,, & \text{kun } k \text{ on pariton}\,, \\ 0\,, & \text{kun } k \text{ on parillinen}\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Saadaan siis funktion haluttu kosinisarja

$$S(x) = \frac{1}{2} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pariton}}}^{\infty} \frac{4}{k^2\pi^2}\cos(k\pi x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos((2n+1)\pi x)}{(2n+1)^2}\,.$$

Huomataan, että päinvastoin kuin muut tähän asti johdetut sarjat funktiolle $f(x) = x$, tämä *sarja suppenee itseisesti*. Selitys tälle löytyy, kun tarkastelee miten funktion periodinen parillinen jatke

[2](MAT) Tämän ominaisuuden näkee derivoimalla kosinisarja termeittäin, jolloin siitä tulee sinisarja. Derivaatan jatkuvuutta varten täytyy itse asiassa tehdä itseistä suppenemista hieman vahvempi oletus: $\sum_k |ka_k| < \infty$.



Kuva 6.2: Esimerkin 6.15 parillisen periodisen jatkeen kuvaaja.

käyttäytyy: sille pätee $g(y) = y/\pi$, kun $0 \leqslant y \leqslant \pi$, joten $g(y) = -y/\pi$, kun $-\pi < y < 0$, eli jatke on itseasiassa funktion $g(y) = |y|/\pi$ periodinen jatke väliltä $[-\pi, \pi]$. Tästä syntyy Kuvassa 6.2 löytyvä sahalaitakuvio, joka on jatkuva kaikkialla. Näin ollen funktion f kosinisarja suppenee myös päätepisteissä, eli nyt $S(x) = x$ kaikilla $0 \leqslant x \leqslant 1$.

6.5 Sarjaesitykset ortonormaalin funktiojonon avulla

6.5.1 Approksimaation virheen mittaaminen funktionormilla

Edellä nähtiin, että Dirichlet'n ehdon toteuttaville funktiolle niiden Fourier'n sarja suppenee kohti alkuperäistä funktiota, mahdollisesti funktion epäjatkuvuuspisteitä lukuun ottamatta. Epäjatkuvuuspisteitä on tällöin oletuksen mukaan äärellinen määrä, joten lähes jokaisessa välin pisteessä yhtyvät sarjan ja funktion arvot.

Usein sovelluksissa ei tarvitsekaan välittää funktion arvoista yhdessä tietyssä pisteessä, vaan kaikki tarpeellinen tieto ratkaisusta saadaan integroimalla sitä sopivasti valittuja suureita vastaan. Tällaisia ovat esimerkiksi kaikki jatkuvan aineen mekaniikan ja kvanttimekaniikan suureet, kuten hiukkas-, energia- ja liikemäärätiheydet. Jos esimerkiksi hiukkastiheyttä $\rho(x)$ arvioidaan simuloidulla hiukkastiheydellä $r(x)$, ei arvion tarvitsekaan olla hyvä jokaisessa pisteessä x, vaan simulaation virhettä voi kuvata hyvin esimerkiksi kertomalla seuraavan integraalin arvo näiden kahden jakauman erotukselle $f(x) := \rho(x) - r(x)$,

$$\|f\| := \sqrt{\int |f(x)|^2 \mathrm{d}x}\,. \tag{6.20}$$

Tätä lukua kutsutaan funktion f **normiksi**,[3] ja se yleistää luonnollisella tavalla funktioille $\mathbb{R}^d$:n **vektorin pituuden**

$$|\boldsymbol{x}| := \sqrt{\sum_{i=1}^{d} |x_i|^2}\,.$$

Osoittautuukin, että myös kun funktio esitetään käyttäen Fourier'n sarjoja tai muunnoksia, on helpompaa tutkia näiden suppenemista käyttäen yllä olevaa funktionormia. Tästä seuraa kuitenkin uusi tekninen hankaluus, josta ei tarvitse lainkaan huolehtia yllä mainituille "tiheyksien" kaltaisille funktioille: jos $f(x) \neq 0$ vain äärellisen monessa pisteessä, pätee sille (integraalien matemaattisen määritelmän mukaan) $\|f\| = 0$. Näin ollen esimerkiksi, jos tiedetään, että tiheyden approksimaatio $r(x)$ on eksakti siinä mielessä, että virheen funktionormi on nolla, $\|\rho - r\| = 0$, ei tästä seuraa, että $r(x) = \rho(x)$ jokaisessa pisteessä, vaan ainoastaan "melkein kaikkialla".

[3](MAT) Tarkemmin, määritelmä (6.20) antaa funktion L^2-normin. Matematiikassa määritellään useita muitakin samantyyppisiä normeja, sillä päinvastoin kuin $\mathbb{R}^d$:ssä, nämä eivät enää ole ekvivalentteja.

Jotta voitaisiin helposti tehdä ero sen kanssa, päteekö $f(x) = 0$ jokaisessa pisteessä vai ainoastaan melkein kaikkialla, käytetään matematiikassa seuraavia määritelmiä funktionormin avulla määriteltyjä virheitä käsiteltäessä.

Määritelmä 6.16 *Oletetaan, että $f : E \to \mathbb{C}$ on funktio, joka on määritelty jossain joukossa E, joka voi olla esimerkiksi koko reaaliakseli tai sen väli. Tällöin määritellään funktionormin avulla vastaava **funktioavaruus** $L^2(E)$, jolla on seuraavat ominaisuudet.*

1. $\|f\| := \sqrt{\int_E |f(x)|^2 \mathrm{d}x}$.
2. $f \in L^2(E)$, *jos* $\|f\| < \infty$.
3. $f \in L^2(E)$ *on **nollafunktio**, jos* $\|f\| = 0$. *Tätä merkitään "*$f = 0$*".*
4. *Jos* $f, g \in L^2(E)$, *määritellään niiden välinen **etäisyys** kaavalla* $\|f - g\|$.
5. *Jos* $f, g \in L^2(E)$, *merkitään* $f = g$, *kun* $\|f - g\| = 0$. *Tällöin sanotaan, että* $f(x) = g(x)$ ***melkein kaikilla*** x.

Lause 6.17 *Seuraavat vektoreiden etäisyyksille pätevät ominaisuudet pätevät myös funktionormille:*

- $\|f\| \geqslant 0$, *kaikilla* $f \in L^2(E)$.
- *Jos* $\alpha \in \mathbb{C}$ *ja* $f \in L^2(E)$, *määritellään funktio* $h := \alpha f$ *kaavalla* $h(x) = \alpha f(x)$, $x \in E$. *Tällöin* $\alpha f \in L^2(E)$ *ja* $\|\alpha f\| = |\alpha| \, \|f\|$.
- *Jos* $f, g \in L^2(E)$, *määritellään funktio* $h := f + g$ *kaavalla* $h(x) = f(x) + g(x)$, $x \in E$.
- *Kolmioepäyhtälö pätee myös normille,* $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$, *ja myös*

$$| \, \|f\| - \|g\| \, | \leqslant \|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\| \, . \tag{6.21}$$

TODISTUS Näiden käsitteiden määritelmät ja Lauseen ominaisuudet käydään huolellisemmin läpi matematiikan mittateoriaa (Mitta ja integraali) ja reaalianalyysiä (Reaalianalyysi I) käsittelevillä kursseilla: seuraavien kommenttien tarkoitus on pelkästään selkeyttää yllä olevien määritelmien yhteyttä näiden kurssien sisältöön ja ne voi huoletta halutessaan hypätä yli. (Osa yllä olevista ominaisuuksista on hyvin suoraviivaisia seurauksia määritelmistä, mutta esimerkiksi kolmioepäyhtälö vaatii jonkin verran työtä.)

(MAT) Mittateorian mielessä yllä annetut määritelmät vastaavat ns. Lebesguen mitan yli otettuja L^2-avaruuksia. Niissä voidaan valita joukoksi E mikä tahansa mitallinen joukko ja "$f = g$ melkein kaikkialla" tarkoittaa sitä, että poikkeusjoukko $\{x \in E \,|\, f(x) \neq g(x)\}$ on nollamitallinen. Matemaattisesti tämän jälkeen korvataankin itse asiassa funktiot niitä vastaavilla ekvivalenssiluokilla, jolloin "$f = g$" säilyttää myös tavallisen joukko-opillisen merkityksensä, kun $f, g \in L^2(E)$. Erityisesti kaikki äärelliset (ja jopa numeroituvat) pistejoukot ovat nollamitallisia Lebesguen mitan suhteen, joten tästä seuraa, että funktion arvon muuttaminen äärellisessä määrässä pisteitä ei muuta sen edustajaa avaruudessa $L^2(E)$. Lause 6.17 todistetaan kurssilla, kun osoitetaan, että $\|f\|$ todellakin määrittelee normin vektoriavaruudessa $L^2(E)$. Lisätietoja myös Wikipediasta (`https://en.wikipedia.org/wiki/Norm_(mathematics)` ja `https://en.wikipedia.org/wiki/Lp_space`). □

Huomautus 6.18

- Tässä siis esimerkiksi $L^2(\mathbb{R})$ tarkoittaa reaaliakselilla määriteltyjä funktioita $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, joille
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \mathrm{d}x < \infty \,.$$
Huomataan, että ainoa polynomi, joka kuuluu avaruuteen $L^2(\mathbb{R})$ on nollafunktio. Se ei sisällä myöskään analyyttisiä funktioita $f(x) = \mathrm{e}^{cx}$ millään kompleksivakiolla c, sillä integraalin suppeneminen vaatii, että $|f(x)| \to 0$, kun $x \to \infty$ ja myös kun $x \to -\infty$. Sen sijaan eksponentiaalisesti vähenevä funktio $\mathrm{e}^{-|x|}$ kuuluu tähän avaruuteen, samoin kuin potenssivähenevät funktiot $f(x) = (1 + |x|)^{-p}$, kunhan $p > \frac{1}{2}$. Avaruuden funktioilla voi olla myös singulariteetteja: esimerkiksi $f(x) = \mathrm{e}^{-x}|x|^{-\frac{1}{4}}$ kuuluu avaruuteen $L^2(\mathbb{R})$ (huomaa, että tässä ei ole mitään merkitystä sillä, minkä arvon f saa origossa; esimerkiksi voi määritellä $f(0) = 0$).

- Fourier'n sarjoja varten tarvitaan esimerkiksi välillä $[-\pi, \pi]$ määriteltyä funktioavaruutta $L^2([-\pi, \pi])$, jolloin siis
$$f \in L^2([-\pi, \pi]) \quad \Rightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \mathrm{d}x < \infty \,.$$
Tähän avaruuteen kuuluvat kaikki rajoitetut funktiot f, joille integraalin arvon voi ylipäätään laskea, eli esimerkiksi kaikki Dirichlet'n ehdon toteuttavat funktiot. Siihen kuuluu myös joitain singulaarisia funktioita, kuten $f(x) = |x|^{-p}$, kun $p < \frac{1}{2}$.

6.5.2 Skalaaritulo, ortogonaalius ja ortonomaalit kannat

Yllä olevaan funktionormiin liittyy luonnollisella tavalla **skalaaritulo**[4]
$$\langle g|f\rangle := \int_E g(x)^* f(x) \mathrm{d}x \,, \qquad f, g \in L^2(E) \,, \tag{6.22}$$
joka yleistää funktioavaruuteen $\mathbb{C}^d$:n pistetulon
$$\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{z} = \sum_{i=1}^{d} w_i^* z_i \,, \qquad w, z \in \mathbb{C}^d \,. \tag{6.23}$$
Tämä taas on tutun $\mathbb{R}^d$:n pistetulon yleistys
$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i \,, \qquad x, y \in \mathbb{R}^d \,. \tag{6.24}$$
Kuten määritelmästä näkee, muodostetaan skalaaritulossa kahdesta funktiosta integraalin avulla kompleksiluku samaan tapaan kuin funktionormissa muodostetaan integraalin avulla yhdestä funktiosta positiivinen reaaliluku. Itse asiassa määritelmistä seuraa suora yhteys näiden kahden luvun välille
$$\|f\| = \sqrt{\langle f|f\rangle} \,. \tag{6.25}$$
Tämän ominaisuuden takia sanotaan, että L^2:n funktionormi on *skalaaritulon määräämä*.

Ei ole kuitenkaan täysin selvää, miksi skalaaritulon integraali suppenisi kaikilla avaruuden L^2 funktiolla. Tämän näkemiseksi tarvitaan seuraavaa aputulosta.

---
[4](MAT) Matematiikassa käytetään usein kaavan (6.22) sijaan määritelmää, jossa funktioiden järjestys on vaihdettu, ja tällöin merkitään $\langle f, g\rangle := \langle g|f\rangle$.

Lause 6.19 (Hölderin epäyhtälö) *Kaikilla (mitallisilla) funktioilla $f, g : E \to \mathbb{C}$ pätee*

$$\int_E |g(x)||f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\int_E |g(x)|^2 \mathrm{d}x} \sqrt{\int_E |f(x)|^2 \mathrm{d}x}\,,$$

myös silloin, kun joku näistä integraaleista saa arvon $+\infty$.

TODISTUS Todistus tehdään reaalianalyysin kurssilla, mutta se löytyy myös lähteestä [3, Lause 3.5] ja Wikipediasta (`https://en.wikipedia.org/wiki/H%C3%B6lder's_inequality`). □

Tästä seuraa erityisesti epäyhtälö

$$|\langle g|f\rangle| \leqslant \int_E |g(x)||f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \|g\| \, \|f\| \,.$$

Näin ollen, jos $f, g \in L^2(E)$, on määritelmän mukaan $\|g\| \, \|f\| < \infty$, joten nähdään myös, että *skalaaritulon määrittelevä integraali on itseisesti suppeneva* kaikilla $f, g \in L^2(E)$.

Alla on listattu skalaaritulon perusominaisuuksia, jotka voi johtaa helposti suoraan määritelmää käyttäen.

1. $\langle f|f\rangle = \|f\|^2 \geqslant 0$, jossa $\langle f|f\rangle = 0$, jos ja vain jos $\|f\| = 0$.
2. (Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö) $|\langle f|g\rangle| \leqslant \|f\| \, \|g\|$.
3. (konjugaattisymmetria) $\langle f|g\rangle^* = \langle g|f\rangle$.
4. (lineaarisuus toisessa argumentissa) $\langle f|\alpha g_1 + \beta g_2\rangle = \alpha \langle f|g_1\rangle + \beta \langle f|g_2\rangle$, aina kun $f, g_1, g_2 \in L^2(E)$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
5. (konjugaattilineaarisuus ensimmäisessä argumentissa) $\langle \alpha f_1 + \beta f_2|g\rangle = \alpha^* \langle f_1|g\rangle + \beta^* \langle f_2|g\rangle$, aina kun $f_1, f_2, g \in L^2(E)$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Määritelmä 6.20

- *Funktiot $f, g \in L^2(E)$ ovat* ***ortogonaaliset****, jos niiden skalaaritulo on nolla: $\langle f|g\rangle = 0$.*
- *Funktiojono $f_n \in L^2(E)$ on* ***ortonormaali****, jos mitkä tahansa kaksi sen funktiota ovat ortogonaaliset ja lisäksi jokaisen funktion normi on yksi. Tämä toteutuu jos ja vain jos*

$$\langle f_m|f_n\rangle = \delta_{m,n} = \mathbb{1}_{\{m=n\}} = \begin{cases} 1\,, & \text{jos } m = n\,, \\ 0\,, & \text{jos } m \neq n\,. \end{cases} \tag{6.26}$$

  Tässä usein käytettyä lyhennysmerkintää $\delta_{m,n} := \mathbb{1}_{\{m=n\}}$ kutsutaan ***Kroneckerin deltaksi****.*
- *Annetusta jonosta (f_n) funktioita voidaan muodostaa* ***lineaarikombinaatiota****. Tällainen saadaan valitsemalla jotkin jonon indeksit n_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, näihin kuuluvat vakiot $\alpha_i \in \mathbb{C}$ ja määrittelemällä funktio $h = \sum_{i=1}^N \alpha_i f_{n_i}$ kaavalla*

$$h(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i f_{n_i}(x)\,.$$

- *Ortonormaali funktiojono (e_n) on* ***täydellinen****, jos sen lineaarikombinaatioiden avulla voidaan approksimoida mielivaltaisen tarkasti (funktionormissa) mitä tahansa funktiota $f \in L^2(E)$. Toisin sanoen, jokaista tarkkuutta $\varepsilon > 0$ kohti täytyy tällöin löytyä jonon indeksit n_i ja vakiot $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, joilla*

$$\left\| f - \sum_{i=1}^N \alpha_i e_{n_i} \right\| < \varepsilon\,.$$

- *Täydellistä ortonomaalia funktiojonoa kutsutaan avaruuden* $L^2(E)$ ***ortonormaaliksi kannaksi.***

- *Jos* (e_n) *on avaruuden* $L^2(E)$ *ortonormaali kanta, määritellään funktion* $f \in L^2(E)$ ***komponentit*** c_n *kannassa* (e_n) *sisätuloina*

$$c_n := \langle e_n | f \rangle \,.$$

Jonon ortonormaaliudesta seuraa tärkeä approksimointiominaisuus, joka kertoo miten löydetään normissa paras approksimaatio jollekin annetulle funktiolle jonon funktioiden lineaarikombinaationa. Tämän näkemiseksi tutkitaan aluksi äärellistä ortonormaalia jonoa $(e_n)_{n=1}^N$ ja jotain funktiota $f \in L^2(E)$. Valitaan mielivaltaiset kertoimet α_n, $n = 1, 2, \ldots, N$ lineaarikombinaation muodostamiseksi. Näin saadun funktion etäisyys funktiosta f toteuttaa skalaaritulon lineaarisuusominaisuuksia hyväksi käyttäen

$$\begin{aligned}
\left\| f - \sum_{n=1}^N \alpha_n e_n \right\|^2 &= \left\langle f - \sum_{n'=1}^N \alpha_{n'} e_{n'} \middle| f - \sum_{n=1}^N \alpha_n e_n \right\rangle \\
&= \left\langle f \middle| f - \sum_{n=1}^N \alpha_n e_n \right\rangle - \sum_{n'=1}^N \alpha_{n'}^* \left\langle e_{n'} \middle| f - \sum_{n=1}^N \alpha_n e_n \right\rangle \\
&= \langle f|f \rangle - \sum_{n=1}^N \alpha_n \langle f|e_n \rangle - \sum_{n'=1}^N \alpha_{n'}^* \langle e_{n'}|f \rangle + \sum_{n',n=1}^N \alpha_{n'}^* \alpha_n \langle e_{n'}|e_n \rangle \,.
\end{aligned}$$

Tämä voidaan kirjoittaa käyttäen funktion f koordinaatteja jonon (e_n) suhteen, eli kompleksilukuja $c_n := \langle e_n|f \rangle$. Sovelletaan lisäksi viimeisessä summassa jonon oletettua ortonormaaliutta, josta saadaan

$$\begin{aligned}
\left\| f - \sum_{n=1}^N \alpha_n e_n \right\|^2 &= \langle f|f \rangle - \sum_{n=1}^N \alpha_n c_n^* - \sum_{n=1}^N \alpha_n^* c_n + \sum_{n',n=1}^N \alpha_{n'}^* \alpha_n \delta_{n',n} \\
&= \langle f|f \rangle - \sum_{n=1}^N |c_n|^2 + \sum_{n=1}^N \left[c_n^* c_n - \alpha_n c_n^* - \alpha_n^* c_n + \alpha_n^* \alpha_n \right] .
\end{aligned}$$

Jäljelle jäävässä summassa $c_n^* c_n - \alpha_n c_n^* - \alpha_n^* c_n + \alpha_n^* \alpha_n = (c_n^* - \alpha_n^*)(c_n - \alpha_n) = |c_n - \alpha_n|^2$.

Ollaan päädytty siis tulokseen

$$\left\| f - \sum_{n=1}^N \alpha_n e_n \right\|^2 = \langle f|f \rangle - \sum_{n=1}^N |c_n|^2 + \sum_{n=1}^N |c_n - \alpha_n|^2 \,. \tag{6.27}$$

Tästä nähdään, että jos jonot (α_n) ja (c_n) eivät ole samat, eli jos löytyy jokin indeksi m, jolla $\alpha_m \neq c_m$, viimeisen summan arvo on aidosti positiivinen ja pätee siis

$$\left\| f - \sum_{n=1}^N \alpha_n e_n \right\|^2 > \langle f|f \rangle - \sum_{n=1}^N |c_n|^2 \,.$$

Toisaalta, sijoittamalla kaavaan (6.27) $\alpha_n = c_n$ saadaan tulos

$$0 \leqslant \left\| f - \sum_{n=1}^N c_n e_n \right\|^2 = \langle f|f \rangle - \sum_{n=1}^N |c_n|^2 \,.$$

Näistä kaavoista päädytään suoraan seuraavaan yleiseen tulokseen, joka pätee myös äärettömille ortonormaaleille jonoille; siinä olevaa kaavaa (6.28) kutsutaan **Besselin epäyhtälöksi**.

Lause 6.21 *Olkoon (e_n) ortonormaali funktiojono avaruudessa $L^2(E)$, $f \in L^2(E)$ ja $c_n := \langle e_n | f \rangle$ vastaavat komponentit. Tällöin*

$$\|f\|^2 \geqslant \sum_n |c_n|^2 \quad \text{ja} \quad \left\| f - \sum_n c_n e_n \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_n |c_n|^2 \geqslant 0 \,. \tag{6.28}$$

Erityisesti siis sarja $\sum_n |c_n|^2$ aina suppenee.

Funktio $\sum_n c_n e_n$ on lisäksi paras approksimaatio funktiosta f jonon (e_n) lineaarikombinaatioiden avulla: jos $\alpha_n \in \mathbb{C}$ on jono kertoimia ja löytyy jokin indeksi m, jolla $\alpha_m \neq c_m$, pätee

$$\left\| f - \sum_n \alpha_n e_n \right\| > \left\| f - \sum_n c_n e_n \right\| . \tag{6.29}$$

Todistus Yllä todistettiin tulos, jos jono (e_n) on äärellinen. (MAT) Jos jono on ääretön, tiedetään siis, että tulos pätee jonolle $(e_n)_{n=1}^N$ kaikilla $N \in \mathbb{N}$. Tällöin luvuille $r_N := \sum_{n=1}^N |c_n|^2$ pätee $r_N \leqslant \|f\|^2 < \infty$ ja $r_{N+1} \geqslant r_N \geqslant 0$ kaikilla N. Näin ollen jono (r_N) on kasvava ja ylhäältä rajoitettu, joten se suppenee, eli myös vastaavalle positiivitermiselle sarjalle pätee $\sum_{n=1}^\infty |c_n|^2 \leqslant \|f\|^2 < \infty$. Tämän jälkeen voidaan näyttää, että löytyy funktio $g \in L^2(E)$, jolle $\left\| g - \sum_{n=1}^N c_n e_n \right\| \to 0$, kun $N \to \infty$, ja tälle funktiolle pätee $\|f - g\|^2 = \|f\|^2 - \sum_n |c_n|^2$ (osasummien jono on tällöin Cauchy-jono ja $L^2(E)$ on täydellinen metrinen avaruus, joten jonolle löytyy raja-arvo g). Tämä antaa merkityksen kaavan (6.28) äärettömälle summalle $\sum_n c_n e_n$. Kaavan (6.29) epäyhtälö taas pätee siinä mielessä, että joko $\left\| f - \sum_{n=1}^N \alpha_n e_n \right\| \to \infty$, kun $N \to \infty$, tai löytyy $h \in L^2(E)$, jolle $\lim_{N\to\infty} \left\| h - \sum_{n=1}^N \alpha_n e_n \right\| = 0$ ja $\lim_{N\to\infty} \left\| f - \sum_{n=1}^N \alpha_n e_n \right\| = \|f - h\| > \|f - \sum_n c_n e_n\|$. □

Tämän tuloksen avulla voidaan johtaa seuraava hyödyllinen tulos, joka näyttää, että jos ortonormaali joukko on täydellinen, sen avulla voidaan esittää kaikki avaruuden $L^2(E)$ funktiot käyttäen funktion koordinaateista muodostettujen lineaarikombinaatioiden sarjaa. Siinä olevaa yhtälöä (6.30) kutsutaan **Parsevalin kaavaksi**.

Lause 6.22 *Ortonormaali funktiojono $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on avaruuden $L^2(E)$ ortonormaali kanta täsmälleen silloin, kun kaikilla $f \in L^2(E)$ pätee*

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |\langle e_n | f \rangle|^2 \,. \tag{6.30}$$

Tällöin

$$\lim_{N\to\infty} \left\| f - \sum_{n=1}^N \langle e_n | f \rangle e_n \right\| = 0 \,, \tag{6.31}$$

jota merkitään $f = \sum\limits_{n=1}^\infty \langle e_n | f \rangle e_n$.

Todistus Olkoon $f \in L^2(E)$ ja merkitään sen koordinaatteja $c_n := \langle e_n | f \rangle$. Koska (e_n) on ortonormaali jono, voidaan soveltaa Lausetta 6.21, josta saadaan

$$\lim_{N\to\infty} \left\| f - \sum_{n=1}^N \langle e_n | f \rangle e_n \right\| = \lim_{N\to\infty} \left(\|f\|^2 - \sum_{n=1}^N |c_n|^2 \right) = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^\infty |c_n|^2 \,.$$

Näin ollen, jos (6.30) pätee, seuraa, että myös (6.31) on totta. Tämä tarkoittaa sitä, että lineaarikombinaatioiden $\sum_{n=1}^{N} \langle e_n|f\rangle e_n$ muodostama jono suppenee normissa kohti funktiota f, jota merkitään $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n|f\rangle e_n$. Jos $\varepsilon > 0$, löytyy siis jokin $N_0 \in \mathbb{N}$, jolle

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N_0} \langle e_n|f\rangle e_n \right\| < \varepsilon\,.$$

Tällöin lineaarikombinaatio $\sum_{n=1}^{N_0} \langle e_n|f\rangle e_n$ on funktion f approksimaatio halutulla tarkkuudella ε. Nähdään siis, että jono (e_n) on täydellinen, jos (6.30) pätee kaikilla $f \in L^2(E)$.

(MAT) Toisaalta, jos löytyy jokin funktio $f \in L^2(E)$, jolle (6.30) ei pidä paikkaansa, niin sitä ei voi approksimoida tarkasti jonon (e_n) lineaarikombinaatioilla: tutkitaan mielivaltaisia indeksejä n_i, $i = 1, 2, \ldots, M$, vakioita $\beta_i \in \mathbb{C}$, ja näistä muodostettua lineaarikombinaatiota $h = \sum_{i=1}^{M} \beta_i e_{n_i}$. Olkoon N suurin indekseistä n_i ja määritellään uudet vakiot α_n, $1 \leqslant n \leqslant N$, asettamalla $\alpha_n = \beta_i$, jos $n = n_i$ jollakin i, ja $\alpha_n = 0$ muuten. Tällöin on myös $h = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n e_n$, sillä summaan on lisätty pelkästään nollafunktioita. Lauseen 6.21 perusteella pätee tällöin

$$\|f - h\|^2 \geqslant \left\| f - \sum_{n=1}^{N} c_n e_n \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 \geqslant \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \geqslant 0\,.$$

Koska f ei oletuksen mukaan toteuta kaavaa (6.30), on oltava $\|f\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 > 0$. Kun valitaan tarkkuudeksi ε ottamalla neliöjuuri luvusta $\|f\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ pätee tässä siis $\|f - h\| \geqslant \varepsilon$ kaikilla lineaarikombinaatioilla h. Näin ollen ortonormaali jono (e_n) ei tässä tapauksessa ole täydellinen. □

Parservalin kaavasta seuraa suoraan myös samanlainen esitys sisätuloille:

Lause 6.23 (Plancherelin kaava) *Jos (e_n) on avaruuden $L^2(E)$ ortonormaali kanta, voidaan funktioiden $f, g \in L^2(E)$ sisätulo aina laskea käyttäen niiden komponentteja,*

$$\langle g|f\rangle = \sum_n \langle g|e_n\rangle\langle e_n|f\rangle\,. \tag{6.32}$$

TODISTUS Jätetään harjoitustehtäväksi tarkistaa, että oheinen **polarisaatioidentiteetti** pätee kaikille kompleksiluvuille z ja w:

$$w^* z = \frac{1}{4}\left(|z+w|^2 - |z-w|^2 + \mathrm{i}|z+\mathrm{i}w|^2 - \mathrm{i}|z-\mathrm{i}w|^2\right) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k |z + \mathrm{i}^k w|^2\,.$$

Käytetään tätä määritelmässä $\langle g|f\rangle = \int_E g(x)^* f(x)\mathrm{d}x$, jolloin nähdään, että integrandissa kiinteällä x pätee

$$g(x)^* f(x) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k |f(x) + \mathrm{i}^k g(x)|^2$$

Koska joukko (e_n) on ortonormaali kanta, voidaan Lauseen 6.22 mukaan käyttää Parsevalin kaavaa (6.30) kaikille funktiolle. Tästä saadaan

$$\begin{aligned}
\langle g|f\rangle &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \int_E |f(x) + \mathrm{i}^k g(x)|^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \left\|f + \mathrm{i}^k g\right\|^2 \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n|f + \mathrm{i}^k g\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k |\langle e_n|f\rangle + \mathrm{i}^k \langle e_n|g\rangle|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n|g\rangle^* \langle e_n|f\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle g|e_n\rangle\langle e_n|f\rangle\,,
\end{aligned}$$

jossa lopussa turvauduttiin polarisaatioidentiteettiin käänteisessä suunnassa. □

Seuraavat ns. Diracin bra-ket merkinnät (`https://en.wikipedia.org/wiki/Bra%E2%80%93ket_notation`) ovat yleisiä varsinkin kvanttimekaniikassa:

Huomautus 6.24

- Jos f on avaruuden L^2 funktio, korostetaan tätä merkitsemällä sitä "ket"-notaatiolla, $|f\rangle$.
- Funktion $g \in L^2$ kompleksikonjugaatin yli integroinnista käytetään vastaavasti "bra"-merkintää, $\langle g|$. Tällöin saadaan skalaaritulo "tulona"
$$\langle g|f\rangle = \int_E g(x)^* f(x)\mathrm{d}x\,.$$
- Jos $(|e_n\rangle)$ on avaruuden $L^2(E)$ *ortonormaali kanta*, pätee identiteettikuvaukselle $1|f\rangle = |f\rangle$ muodollinen hajotelma
$$1 = \sum_n |e_n\rangle\langle e_n|\,.$$
Tästä saadaan nimittäin braket-merkinöillä
$$|f\rangle = 1|f\rangle = \sum_n |e_n\rangle\langle e_n|f\rangle \quad \text{ja} \quad \langle g|f\rangle = \langle g|1|f\rangle = \sum_n \langle g|e_n\rangle\langle e_n|f\rangle\,,$$
joten hajotelma on hyvä muistisääntö sekä Lauseelle 6.22 että Planchrelin kaavalle.

6.5.3 Parsevalin ja Plancherelin kaavat Fourier'n sarjoille

Fourier'n sarjat muodostavat itse asiassa hyvän esimerkin edellisessä luvussa johdetuista tuloksista. Määritellään
$$e_k(x) := \frac{1}{\sqrt{L}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{2\pi}{L}x}\,, \quad x \in [0,L],\ k \in \mathbb{Z}\,.$$
Kullakin k saadaan näin aikaiseksi välillä $[0,L]$ annettu funktio, jolle $|e_k(x)| = 1/\sqrt{L}$ kaikilla x, ja siten myös $\int_0^L |e_k(x)|^2\mathrm{d}x < \infty$. Näin ollen $e_k \in L^2([0,L])$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$. Kuten Lauseen 6.3 todistuksessa, (6.26), nähdään helposti, että kaikilla $L > 0$ ja $k', k \in \mathbb{Z}$ pätee
$$\langle e_{k'}|e_k\rangle = \int_0^L \frac{1}{\sqrt{L}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'\frac{2\pi}{L}x}\right)^* \frac{1}{\sqrt{L}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{2\pi}{L}x}\mathrm{d}x = \frac{1}{L}\int_0^L \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k')\frac{2\pi}{L}x}\mathrm{d}x = \delta_{k',k} = \begin{cases} 0\,, & \text{jos } k-k' \neq 0\,,\\ 1\,, & \text{jos } k-k' = 0\,.\end{cases}$$
Näin ollen muodostavat funktiot $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *ortonormaalin jonon* avaruudessa $L^2([0,L])$. Tämä jono on itse asiassa *täydellinen*[5] Siten $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ **on eräs avaruuden $L^2([0,L])$ ortonormaali kanta**.

Funktion f komponentit tässä kannassa saadaan Fourier'n kertoimien avulla, sillä määritelmistä seuraa
$$\langle e_k|f\rangle = \int_0^L \frac{1}{\sqrt{L}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\frac{2\pi}{L}x}f(x)\mathrm{d}x = \sqrt{L}\,\widehat{f}_k\,,$$
jossa viimeisessä vaiheessa on käytetty Fourier'n kertoimien $\widehat{f}_k := \widehat{f}_{k;[0,L]}$ määritelmää kaavassa (6.16). Näin ollen Lauseesta 6.22 saadaan tulos, että funktionormin mielessä
$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\langle e_k|f\rangle e_k(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sqrt{L}\,\widehat{f}_k\frac{1}{\sqrt{L}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{2\pi}{L}x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{f}_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{2\pi}{L}x}\,,$$

[5] Täydellisyyden voi ehkä uskoa, kun muistaa, että jokaiselle Dirichlet'n ehdot toteuttavalle funktiolle sen Fourier'n sarja suppenee melkein kaikkialla kohti tätä funktiota. Itse asiassa mitä tahansa tahansa $f \in L^2(E)$ voi approksimoida mielivaltaisen tarkasti normissa jollain Dirichlet'n ehdot toteuttavalla funktiolla, ja sen voi jopa tehdä käyttäen ns. trigonometrisiä polynomeja, jotka ovat juuri funktioiden (e_k) lineaarikombinaatioita. Todistus tähän löytyy esim. lähteestä [3, Luku 4.24].

eli **funktion** $f \in L^2([0,L])$ **Fourier'n sarja suppenee aina funktionormissa.**[6]

Toisaalta Parsevalin (6.30) ja Plancherelin (6.32) kaavat voidaan nyt kirjoittaa auki yhtälöksi, joka yhdistää integraalien ja sarjojen summien arvoja keskenään.

Parsevalin kaavan mukaan kaikilla $f \in L^2([0,L])$ pätee

$$\int_0^L |f(x)|^2 \mathrm{d}x = L \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}_k|^2 \,, \tag{6.33}$$

ja Plancherelin kaava tulee funktioille $f, g \in L^2([0,L])$ muotoon

$$\int_0^L g(x)^* f(x) \mathrm{d}x = L \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k^* \widehat{g}_k \,. \tag{6.34}$$

Parsevalin kaavaa on joskus kätevintä käyttää suoraan trigonometristen kertoimien avulla. Palautetaan mieleen, että $a_k = \widehat{f}_k + \widehat{f}_{-k}$ ja $b_k = \mathrm{i}(\widehat{f}_k - \widehat{f}_{-k})$, minkä näkee myös suoraan laskemalla määritelmistä (6.16). Näin ollen

$$|a_k|^2 + |b_k|^2 = (\widehat{f}_k^* + \widehat{f}_{-k}^*)(\widehat{f}_k + \widehat{f}_{-k}) + (\widehat{f}_k^* - \widehat{f}_{-k}^*)(\widehat{f}_k - \widehat{f}_{-k}) = 2(\widehat{f}_k^* \widehat{f}_k + \widehat{f}_{-k}^* \widehat{f}_{-k}) = 2(|\widehat{f}_k|^2 + |\widehat{f}_{-k}|^2) \,.$$

Tästä seuraa

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(|\widehat{f}_k|^2 + |\widehat{f}_{-k}|^2\right) = -|\widehat{f}_0|^2 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}_k|^2 \,.$$

Koska $a_0 = 2\widehat{f}_0$, on tässä $|\widehat{f}_0|^2 = \frac{1}{4}|a_0|^2$ ja Parsevalin kaavan (6.33) mukaan saadaan siis

Parsevalin kaava trigonometrisille kertoimille

$$\int_0^L |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \frac{L}{2} \left[\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right) \right] . \tag{6.35}$$

Huomautus 6.25

- Yllä olevat kaavat on johdettu kertoimille, jotka lasketaan origosta lähteville väleille, eli kun $a = 0$. Kuten aiemmin huomattiin, Fourier'n kertoimet muuttuvat vain vaihetermillä, kun kehityspistettä siirretään, ja tällöin kertoimien modulit $|\widehat{f}_k|$ säilyvät ennallaan. Parsevalin kaavan oikea puoli ei siis riipu kehityspisteen a valinnasta lainkaan. Vasemman puolen integraalin arvokin säilyy myös ennallaan, kunhan muistaa käyttää siinä funktion f L-periodista jatketta, jolle $\int_0^L |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \int_a^{a+L} |f(x)|^2 \mathrm{d}x$.

Esimerkki 6.26 Esimerkissä 6.8 laskettiin funktion $f(x) = x$, kun $x \in [-\pi, \pi]$, Fourier'n kertoimiksi $\widehat{f}_k = \mathrm{i}\frac{(-1)^k}{k}$, kun $k \neq 0$, ja $\widehat{f}_0 = 0$. Näin ollen kaavan (6.33) oikean puoli saa tällöin arvon

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}_k|^2 = 2\pi \left(\sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right) = 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 4\pi\zeta(2) \,.$$

[6] Itse asiassa funktionormissa suppenemisesta seuraa, että löytyy jono kokonaislukuja $N_n \to \infty$, jolla $f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-N_n}^{N_n} \widehat{f}_k e^{\mathrm{i}k\frac{2\pi}{L}x}$ melkein kaikilla x, ks. [3, 3.12].

Toisaalta kaavan vasemman puolen integraali antaa tuloksekseksi

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \mathrm{d}x = \Big/_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}2\pi^3 \,.$$

Parsevalin kaavan mukaan pätee siis

$$4\pi\zeta(2) = \frac{2}{3}\pi^3 \quad \Rightarrow \quad \zeta(2) = \frac{1}{6}\pi^2 \,.$$

Sama tulos johdettiin jo Esimerkissä 6.12 tietyn Fourier'n sarjan arvoa käyttäen.