Luku 6

Fourier'n sarja

6.1 Johdantoa: Diskreetti Fourier'n muunnos

Diskreetti Fourier'n muunnos (`https://en.wikipedia.org/wiki/Discrete_Fourier_transform`) kuvaa N-ulotteisen kompleksilukuvektorin $\psi = (\psi_k)_{k=0}^{N-1}$ vastaavanlaiseksi N-ulotteiseksi kompleksilukuvektoriksi $\widehat{\psi}$ kaavaa

$$\widehat{\psi}_n := \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k2\pi\frac{n}{N}}\psi_k\,, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1\,, \tag{6.1}$$

käyttäen. Diskreetti Fourier'n muunnos on taustalla esimerkiksi numeerisissa algoritmeissa, joilla lasketaan varsinaisia Fourier'n muunnoksia; ks. *fast Fourier transform* (FFT) -algoritmit Wikipediasta (`https://en.wikipedia.org/wiki/Fast_Fourier_transform`).

Sen avulla voidaan ratkaista myös *kaikki* differentiaaliyhtälöt, jotka ovat muotoa

$$\partial_t\psi_k(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} K_m\psi_{k-m}(t)\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,, \tag{6.2}$$

jos $K_m = 0$, kun $|m| \geqslant N/2$, ja $\psi_k(0)$ on N-**periodinen** eli $\psi_{k+N}(0) = \psi_k(0)$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$. (Tällaisia yhtälöitä kutsutaan konvoluutioyhtälöiksi äärellisen konvoluutioytimen K suhteen.) Esimerkiksi *diskreetti diffuusioyhtälö*,

$$\partial_t\psi_k(t) = D\left(2\psi_k(t) - \psi_{k-1}(t) - \psi_{k+1}(t)\right)\,,$$

jossa $D > 0$ on jokin annettu parametri, on tätä muotoa: voidaan valita

$$K_m = D\left(2\mathbb{1}_{\{m=0\}} - \mathbb{1}_{\{m=1\}} - \mathbb{1}_{\{m=-1\}}\right)\,,$$

jolle $K_m = 0$ aina, kun $|m| \geqslant 2$.

Ratkaisun löytämiseksi oletetaan aluksi, että se on N-periodinen kaikilla t. Otetaan tämän jälkeen yhtälön (6.2) molemmista puolista diskreetti Fourier'n muunnos, jolloin pienen laskun jälkeen saadaan

$$\partial_t\widehat{\psi}_n(t) = \widehat{K}_n\widehat{\psi}_n(t)\,, \qquad \widehat{K}_n := \sum_{m\in\mathbb{Z}} K_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}m2\pi\frac{n}{N}}\,.$$

(Yleisestikin Fourier'n muunnos kuvaa konvoluutiot tuloksi, niin kuin myöhemmin nähdään.) Yhtälön ratkaisu on yksikertainen, kun alkutila $\psi(0)$ on annettu:

$$\widehat{\psi}_n(t) = \mathrm{e}^{t\widehat{K}_n}\widehat{\psi}_n(0)\,.$$

Tämän jälkeen ei tarvitse kuin löytää **käänteismuunnos** $A : \widehat{\psi} \mapsto \psi$, ja yhtälön ratkaisulle saadaan kaava

$$\psi_k(t) = (A[\mathrm{e}^{t\widehat{K}}\widehat{\psi}(0)])_k\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,,\ k = 0, 1, \ldots, N-1\,.$$

Lopputulos jatketaan N-periodiseksi määrittelemällä $\psi_{mN+k}(t) = \psi_k(t)$ kaikilla $m \in \mathbb{Z}$. Tästä saadaan algoritmi, jolla N-periodinen alkutila $\psi(0)$ määrittelee N-periodiset funktiot $\psi(t)$. Lopuksi voikin vielä varmistaa laskulla, että tämä algoritmi tosiaan tuottaa yhtälön (6.2) ratkaisuja.

Kuten myöhemmin nähdään, voi samankaltaisella algoritmilla johtaa myös vapaan hiukkasen Schrödingerin yhtälölle,

$$\partial_t \psi(x,t) = \mathrm{i}\frac{1}{2m}\nabla_x^2 \psi(x,t)\,, \tag{6.3}$$

yhtälössä (5.29) annetun ratkaisukaavan.

Itse asiassa käänteismuunnos A löytyy helposti: kuten harjoitustehtävässä Ib.2.1, voidaan äärellisen geometrisen summan kaavaa (2.1) käyttäen johtaa seuraava tulos, olettaen $k \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k2\pi\frac{n}{N}} = \delta_N(k) := \begin{cases} 0\,, & \text{jos } k \neq mN \text{ kaikilla } m \in \mathbb{Z}\,, \\ N\,, & \text{jos } k = mN \text{ jollakin } m \in \mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

Näin ollen, jos $k = 0, 1, \ldots, N-1$, saadaan "vääränmerkkisestä" Fourier'n muunnoksesta tulos

$$\sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k2\pi\frac{n}{N}} \widehat{\psi}_n = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k'=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k2\pi\frac{n}{N}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k'2\pi\frac{n}{N}} \psi_{k'} = \sum_{k'=0}^{N-1} \psi_{k'} \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'-k)2\pi\frac{n}{N}} = \sum_{k'=0}^{N-1} \psi_{k'} \delta_N(k'-k)\,.$$

Viimeisessä summassa on tasan yksi termi, joka poikkeaa nollasta, ja se saadaan, kun $k' = k$. Näin ollen summan arvo on aina $N\psi_k$, ja saadaankin kaava

$$\psi_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k2\pi\frac{n}{N}} \widehat{\psi}_n\,.$$

Koska vektori ψ on tässä laskussa mielivaltainen, nähdään, että käänteismuunnos A on olemassa ja sen määrittelee kaava

$$A[\,\Psi\,]_k := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k2\pi\frac{n}{N}} \Psi_n\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1\,. \tag{6.4}$$

Tutkitaan sitten, mitä tapahtuu, jos näissä kaavoissa otetaan $N \to \infty$ sopiville lähtövektoreille. Aloitetaan käänteismuunnoksesta olettaen, että vektori Ψ_n rakennetaan valitsemalla arvoja jatkuvasta funktiosta f kaavalla

$$\Psi_n := f\Big(2\pi \frac{n}{N}\Big)\,.$$

Tällöin

$$A[\,\Psi\,]_k = \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f\Big(2\pi\frac{n}{N}\Big)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k2\pi\frac{n}{N}} \xrightarrow{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x\,,$$

sillä summa muodostaa Riemannin summa -approksimaation oikean puolen integraalista käyttäen tasavälijakoa, jossa välin pituus on $h = \frac{2\pi}{N}$. Raja-arvona saatujen integraalien arvoja kutsutaan funktion f **Fourier'n kertoimiksi**,

$$\widehat{f}_k := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,. \tag{6.5}$$

Tarkastellaan sitten itse diskreettiä muunnosta ja jatketaan siinä vektori ψ_k, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, kaavalla $\psi_{mN+k} = \psi_k$, $m \in \mathbb{Z}$, N-periodiseksi. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi myös, että N on parillinen ja kirjoitetaan muunnoksen määritelmä uudestaan käyttäen ominaisuutta $\psi_k = \psi_{k-N}$

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}_n &= \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k2\pi\frac{n}{N}}\psi_k = \sum_{k=0}^{N/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k2\pi\frac{n}{N}}\psi_k + \sum_{k=N/2+1}^{N-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k2\pi\frac{n}{N}}\psi_{k-N} \\ &= \sum_{k=0}^{N/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k2\pi\frac{n}{N}}\psi_k + \sum_{k'=-N/2+1}^{-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'+N)2\pi\frac{n}{N}}\psi_{k'} = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k2\pi\frac{n}{N}}\psi_k\,,\end{aligned}$$

sillä $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi n} = 1$, kun $n \in \mathbb{Z}$. Oletetaan nyt, että suurilla $|k|$:n arvoilla ψ_k:n arvot poimitaan jonosta $(\psi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ottamalla indeksejä $-\frac{N}{2} + 1 \leqslant k \leqslant \frac{N}{2}$ vastaavat arvot, ja että alkuperäinen jono on itseisesti summautuva, $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |\psi_k| < \infty$. Tällöin

$$\lim_{N\to\infty} \Big(\widehat{\psi}_n - f\Big(2\pi\frac{n}{N}\Big)\Big) = 0\,,$$

funktiolle

$$f(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,,$$

joka on hyvin määritelty kaikilla $x \in \mathbb{R}$ itseisesti summautuvan sarjan avulla. Tätä funktiota kutsutaan **annetuista kertoimista ψ_k, $k \in \mathbb{Z}$, tehdyn Fourier'n sarjan** määrittelemäksi.

Tässä luvussa tutkitaan yllä määriteltyjen Fourier'n kertoimien käyttäytymistä ja niistä tehtyjä Fourier'n sarjoja. Tarkoituksena on nähdä mitkä diskreetin Fourier'n muunnoksen ominaisuuksista periytyvät myös sarjoille: milloin funktion kertoimien Fourier'n sarja suppenee, milloin muunnokset ovat edelleen toistensa käänteismuunnoksia ja missä mielessä?

6.2 Fourier'n sarja välillä $[0, 2\pi]$

Aloitetaan lisäämällä oletukset, jotka varmistavat, että edellisen johdantoluvun määritelmät varmasti toimivat.

Määritelmä 6.1 (Fourier'n sarja) *Kompleksilukujonon $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ muodostama Fourier'n sarja määritellään pääarvomielessä, kaavalla*

$$S(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} := \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,, \tag{6.6}$$

*kaikissa niissä pisteissä $x \in \mathbb{R}$, joissa raja-arvo on olemassa. Jos raja-arvo löytyy, sanotaan, että **Fourier'n sarja suppenee pisteessä** x.*

Määritelmästä seuraa suoraan, että jos $S(x)$ on määritelty, on myös $S(x + 2\pi m)$, $m \in \mathbb{Z}$, määritelty ja sille pätee $S(x+2\pi m) = S(x)$. Näin ollen kaavan (6.6) Fourier'n sarjan määrittelemä funktio S on aina **2π-periodinen**. Alla on myös annettu erikoistapaus, jossa Fourier'n sarja suppenee kaikkialla ja määrittelee jatkuvan funktion. *Jatkuvat periodiset funktiot ovat aina myös rajoitettuja*, sillä ne saavuttavat maksiminsa ja miniminsä jossain periodisuusvälin pisteessä (`https://en.wikipedia.org/wiki/Extreme_value_theorem`).

Lause 6.2 *Olkoon $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ **itseisesti suppeneva** kompleksilukujono,*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty\,.$$

*Tällöin Fourier'n sarja (6.6) suppenee itseisesti kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja määrittelee **jatkuvan** funktion $S : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.*

TODISTUS Koska $|e^{ikx}| = 1$, kun $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$, oletuksista seuraa suoraan, että kaavan (6.6) sarja suppenee itseisesti ja toteuttaa Weierstrassin M-testin koko reaaliakselilla, majoranttina jono $(|c_k|)$. Erityisesti arvojen $k < 0$ ja $k > 0$ muodostamat sarjatkin suppenevat erikseen, joten myös kaavan (6.6) raja-arvo suppenee kohti sarjan antamaa kompleksilukua. $S(x)$ on siis hyvin määritelty kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Toisaalta, koska jokainen funktioista $x \mapsto c_k e^{ikx}$ on jatkuva kiinteällä indeksillä k ja jono toteuttaa M-testin, periytyy jatkuvuus myös sarjan summalle, eli funktiolle $S(x)$ (ks. Luku 2.2.1). □

Määritelmä 6.3 (2π-periodisen funktion Fourier'n kertoimet) *Oletetaan, että $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on 2π-**periodinen funktio**, eli $f(x+2\pi) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, ja se on itseisesti integroituva välillä $[0, 2\pi]$, eli*

$$\int_0^{2\pi} |f(x)| \mathrm{d}x < \infty \, .$$

Tällaisen funktion Fourier'n kertoimet muodostavat kompleksilukujonon $(\widehat{f}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, jonka alkiot määritellään itseisesti suppenevina integraaleina,

$$\widehat{f}_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x \, , \qquad k \in \mathbb{Z} \, . \tag{6.7}$$

*Näiden kertoimien muodostaman jonon $(\widehat{f}_k)$ Fourier'n sarjaa kutsutaan funktion f **Fourier'n sarjaesitykseksi**.*

Huomautus 6.4

- Kertoimien määritelmässä (6.7) voidaan integrointiväliä siirtää vapaasti, eli integroida minkä tahansa välin $[y, y+2\pi]$, $y \in \mathbb{R}$, yli, sillä oletuksista seuraa, että *integrandi on 2π-periodinen* (jätetään asian todistaminen harjoitustehtäväksi). Esimerkiksi tällöin pätee

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x \, , \qquad k \in \mathbb{Z} \, . \tag{6.8}$$

Sopivasti tulkittuna ovat nämä muunnokset itse asiassa edelleen toistensa käänteismuunnoksia. Aloitetaan erikoistapauksesta, jossa käänteismuunnos toimii jokaisessa pisteessä.

Lause 6.5 *Oletetaan, että $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on **jatkuva** 2π-periodinen funktio ja oletetaan, että sen Fourier'n kertoimien muodostama sarja suppenee itseisesti, eli*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \widehat{f}_k \right| < \infty \, .$$

*Tällöin funktion f Fourier'n sarjaesitys suppenee **jokaisessa pisteessä** kohti funktiota f:*

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k e^{ikx} \, , \qquad x \in \mathbb{R} \, .$$

TODISTUS Lauseen 6.2 perusteella jonon $(\widehat{f}_k)$ Fourier'n sarja suppenee siis itseisesti kaikkialla ja määrittelee jatkuvan periodisen funktion $S(x)$. Lasketaan tämän funktion Fourier'n kertoimet,

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_{k'} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k'-k)x} \mathrm{d}x \, ,$$

jossa summausjärjestyksen ja integroinnin vaihdon voi perustella itseisellä summautuvuudella Luvun 2.2.1 tuloksen (2) tapaan. Jos tässä $k' - k \neq 0$, saadaan

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'-k)x} \mathrm{d}x = \Big/_0^{2\pi} \frac{1}{\mathrm{i}(k'-k)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'-k)x} = \frac{1}{\mathrm{i}(k'-k)} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'-k)2\pi} - 1 \right) .$$

Näin ollen, kun $k, k' \in \mathbb{Z}$, on myös $k' - k$ kokonaisluku, ja saadaan tulos

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'-k)x} \mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,, & \text{jos } k' - k \neq 0\,, \\ 1\,, & \text{jos } k' - k = 0\,. \end{cases} \tag{6.9}$$

eli integraalin arvo on nolla, jos $k' \neq k$, ja se on yksi, jos $k' = k$. Näin ollen $c_k = \widehat{f}_k$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$, eli jatkuvilla funktioilla f ja S on sama Fourier'n sarja. Todistus siitä, että tästä seuraa $f(x) = S(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, jätetään matematiikan Fourier-analyysin kursille. □

Huomautus 6.6

- Yllä olevista tuloksista seuraa itse asiassa myös, että jos funktion $f(x)$ Fourier'n sarja on *itseisesti summautuva* voi sen "korvata" jatkuvalla funktiolla $S(x)$ määrittelemällä sen uudelleen "muutamassa" pisteessä.[1]

- Tyypillisesti epäjatkuvien funktioiden Fourier'n sarjat eivät olekaan itseisesti summautuvia, vaan ne suppenevat vain kaavan (6.6) pääarvomielessä (ks. seuraava Esimerkki).

- Näissä tuloksissa on tärkeää, että **periodinen funktio f on jatkuva myös päätepisteissä** 0 **ja** 2π, eli f:n jatkuvuusoletus vaatii myös, että $\lim_{\varepsilon \to 0^+} f(2\pi - \varepsilon) = f(2\pi) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} f(2\pi + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} f(\varepsilon) = f(0)$, eli funktion täytyy olla oikealta jatkuva pisteessä 0, vasemmalta jatkuva pisteessä 2π, ja lisäksi $f(0) = f(2\pi)$.

Huomautus 6.7 Kun pyydetään laskemaan **reaaliakselilla määritellyn funktion f Fourier'n sarja jollain välillä** $[a, b]$, $b = a + L$ ja $L > 0$, tarkoituksena on etsiä kerroinjono, joiden muodostama L-periodinen Fourier'n sarja approksimoi mahdollisimman hyvin funktiota f välillä $[a, b]$. Tämä saadaan aikaan seuraavasti (tämän luvun funktioille periodisuusvälin pituus $L = 2\pi$):

1. Poistetaan toinen välin päätepisteistä (ei ole väliä kumpi), ja tutkitaan esimerkiksi väliä $I :=]a, b]$.

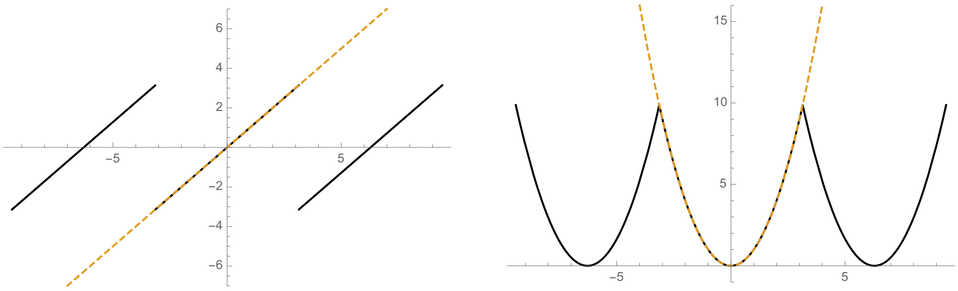
2. Aloitetaan määrittelemällä funktio g funktion f rajoittumana välille I, eli asetetaan $g(x) = f(x)$, kun $x \in I$.

3. Jatketaan funktio g periodisesti koko reaaliakselille, eli määritellään $g(x + mL) = g(x) = f(x)$, aina kun $x \in I$, $m \in \mathbb{Z}$, jossa $L = b - a > 0$ on välin pituus.

4. Käytetään L-periodisen funktion g Fourier'n sarjaa $S(x)$.

Tällöin nimittäin kaikissa pisteissä $x \in I$, joissa $S(x) = g(x)$, pätee automaattisesti myös $S(x) = f(x)$, eli saatu sarja esittää funktiota f juuri välin $[a, b]$ pisteissä.

[1](MAT) Tarkemmin: jatkuva funktio S yhtyy tällöin alkuperäiseen funktioon f melkein kaikkialla, lukuun ottamatta Lebesguen mitan suhteen nollamittaista joukkoa.



Kuva 6.1: Kahden funktion $f(x)$ (oranssi katkoviiva) periodiset jatkeet $g(x)$ (musta viiva) kahdessa eri tapauksessa väliltä $]-\pi,\pi]$: (*vasen kuva*) $f(x) = x$, (*oikea kuva*) $f(x) = x^2$.

Esimerkki 6.8 Laske funktion $f(x) = x$ Fourier'n sarja välillä $[-\pi, \pi]$.
Ratkaisu: Rakennetaan ensin f:n 2π-periodinen jatke g kuten Huomautuksessa 6.7 käyttäen väliä $I =]-\pi,\pi]$ – Kuvassa 6.1 vasemmalla puolella on annettu funktioiden f ja g kuvaajat. Lasketaan tämän jälkeen g:n Fourier'n kertoimet $\widehat{g}_k$ ja merkitään näitä yksinkertaisuuden vuoksi c_k:lla. Koska g on 2π-periodinen, voidaan c_k laskea myös integraaleja (6.8) käyttäen,

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x\,.$$

Jos $k \neq 0$, on funktion $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$ integraalifunktio $\frac{1}{-\mathrm{i}k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$. Tällöin voidaan yllä oleva integraali laskea osittaisintegroimalla,

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi}\left(\Big/_{-\pi}^{\pi} x\frac{1}{-\mathrm{i}k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{-\mathrm{i}k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x\right) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi k}\left(\pi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi} - (-\pi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi} - \Big/_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{-\mathrm{i}k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right)\\
&= \frac{\mathrm{i}}{2k}\left((-1)^{-k} + (-1)^k\right) = \mathrm{i}\frac{(-1)^k}{k}\,,
\end{aligned}$$

sillä $\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\pi} = (-1)^k = (-1)^{-k} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\pi}$ aina, kun $m \in \mathbb{Z}$. Lisäksi, kun $k = 0$, saadaan

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\Big/_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}x^2 = 0\,.$$

Näin ollen funktion g Fourier's sarja, joka on sama kuin etsitty funktion f Fourier'n sarja välillä $[-\pi, \pi]$, kuuluu

$$S(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{\infty}\mathrm{i}\frac{(-1)^k}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,.$$

Huomataan, että tämä sarja *ei* suppene itseisesti, sillä sen itseisarvojen muodostama sarja on $\sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{\infty}\frac{1}{|k|} = \infty$. Näin ollen täytyy Fourier'n sarja määritellä käyttäen kaavan (6.6) raja-arvoa, eikä ole vielä selvää milloin se suppenee.

Sarjaa voi vielä sieventää muotoon, josta näkyy esimerkiksi se, että sarja tuottaa supetessaan aina reaalisia arvoja: nyt

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{k=-N\\ k\neq 0}}^{N}\mathrm{i}\frac{(-1)^k}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} &= \sum_{k=1}^{N}\mathrm{i}\frac{(-1)^k}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + \sum_{k=-N}^{-1}\mathrm{i}\frac{(-1)^k}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \sum_{k=1}^{N}\mathrm{i}\frac{(-1)^k}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + \sum_{k'=1}^{N}\mathrm{i}\frac{(-1)^{-k'}}{-k'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'x}\\
&= \sum_{k=1}^{N}\mathrm{i}\frac{(-1)^k}{k}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right) = \sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{k+1}}{k}2\sin(kx)\,.
\end{aligned}$$

Näin ollen, kun otetaan tässä raja $N \to \infty$, saadaan sarja

$$S(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx)\,,$$

jonka suppenemista voi tarkastella käyttäen sarjojen tavallista suppenemista, kuten Luvussa 2.1 määriteltiin. Itse asiassa kohta esitettävän Dirichlet'n lauseen perusteella nähdään, että sarja suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$, ja se esittää funktiota $f(x) = x$ pisteissä $-\pi < x < \pi$. Päätepisteissä esitys ei enää kuitenkaan päde, vaan saadaan $S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2} = \frac{-\pi+\pi}{2} = 0$.

Lause 6.9 (Dirichlet'n lause) *Oletetaan, että f on 2π-periodinen reaalifunktio, joka toteuttaa **Dirichlet'n ehdot**:*

1. *Funktiolla f on vain äärellisen monta epäjatkuvuuspistettä välillä $[0, 2\pi]$, ja jokaisessa epäjatkuvuuspisteessä x_0 löytyy funktiolle sekä vasemmalta että oikealta otettu raja-arvo, eli luvut*

$$f(x_0^-) := \lim_{x\to x_0^-} f(x) := \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)\,, \tag{6.10}$$

$$f(x_0^+) := \lim_{x\to x_0^+} f(x) := \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)\,. \tag{6.11}$$

2. *Funktiolla f on vain äärellinen määrä paikallisia ääriarvopisteitä (eli lokaaleja maksimeja ja minimejä) välillä $[0, 2\pi]$. (Tämä tarkoittaa sitä, että f ei saa heilahdella rajattomasti.)*

Tällöin funktion f Fourier'n sarja

$$S(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k e^{ikx}\,,$$

suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja sillä on samat Fourier'n kertoimet kuin funktiolla f, eli $\widehat{S}_k = \widehat{f}_k$. Lisäksi

1. *S **esittää funktiota f kaikissa sen jatkuvuuspisteissä**, eli $S(x) = f(x)$, jos x on piste, jossa f on jatkuva.*

2. *Funktion f **epäjatkuvuuspisteessä x_0 saa S arvon epäjatkuvuuden muodostaman hypyn puolivälistä**,*

$$S(x_0) = \frac{1}{2}\left(f(x_0^-) + f(x_0^+)\right)\,.$$

Todistus Tämän lauseen todistus tehdään matematiikan Fourier-analyysin kurssilla. Wikipediasta (`https://en.wikipedia.org/wiki/Dirichlet_conditions`) löytyy myös lisää yksityiskohtia. □

Huomautus 6.10

- Huomaa, että lause koskee myös funktion arvoja välin päätepisteissä, eli jos $f(2\pi^-) \neq f(0^+)$, on $S(0) = S(2\pi) = \frac{1}{2}\left(f(2\pi^-) + f(0^+)\right)$. Tämä tilanne tulee usein vastaan, kun lasketaan jatkuvalle funktiolle Fourier'n sarjaesityksiä jollain suljetulla välillä, ks. Esimerkki 6.8.

- Dirichlet'n lausetta voi soveltaa myös, kun funktio f on *kompleksiarvoinen*. Tällöin vaaditaan, että sekä $\operatorname{Re} f$ että $\operatorname{Im} f$ toteuttavat molemmat erikseen Dirichlet'n ehdot.

6.3 Trigonometriset sarjat

Jos funktiolla f on Fourier'n sarjaesitys, on sillä aina myös esitys trigonometristen funktioiden $\cos(kx)$ ja $\sin(kx)$ avulla. Nimittäin Eulerin kaavasta seuraa, että

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}_k e^{ikx} &= \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}_k \left(\cos(kx) + i\sin(kx)\right) \\
&= \widehat{f}_0 + \sum_{k=1}^{N} \widehat{f}_k \cos(kx) + \sum_{k=-N}^{-1} \widehat{f}_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{N} i\widehat{f}_k \sin(kx) + \sum_{k=-N}^{-1} i\widehat{f}_k \sin(kx) \\
&= \widehat{f}_0 + \sum_{k=1}^{N} \widehat{f}_k \cos(kx) + \sum_{k'=1}^{N} \widehat{f}_{-k'} \cos(-k'x) + \sum_{k=1}^{N} i\widehat{f}_k \sin(kx) + \sum_{k'=1}^{N} i\widehat{f}_{-k'} \sin(-k'x) \\
&= \widehat{f}_0 + \sum_{k=1}^{N} \left[\left(\widehat{f}_k + \widehat{f}_{-k}\right)\cos(kx) + i\left(\widehat{f}_k - \widehat{f}_{-k}\right)\sin(kx)\right],
\end{aligned}
$$

jossa on käytetty hyväksi kosinin parillisuutta ja sinin parittomuutta. Näin ollen, jos Fourier'n sarja suppenee pisteessä x, suppenee myös vastaava trigonometrinen sarja pisteessä x, ja pätee

$$
\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k e^{ikx} = \widehat{f}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right],
$$

kun määritellään

$$
a_k = \widehat{f}_k + \widehat{f}_{-k}, \qquad b_k = i\left(\widehat{f}_k - \widehat{f}_{-k}\right), \qquad k \in \mathbb{N}.
$$

Nämä kertoimet voi myös laskea suoraan integraalien avulla, kuten Fourier'n sarjan kertoimet (6.7). Lähetään liikkeelle funktion f periodisuuteen perustuvasta symmetrisestä integrointivälistä (6.8), jonka mukaan yllä on kaikilla $k \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \widehat{f}_k + \widehat{f}_{-k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(e^{-ikx} + e^{ikx}\right) dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, \\
b_k &= i\left(\widehat{f}_k - \widehat{f}_{-k}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) i\left(e^{-ikx} - e^{ikx}\right) dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx).
\end{aligned}
$$

Käytetäänkin tämän jälkeen yllä olevaa integraalia määrittelemään myös a_k, kun $k = 0$, eli asetetaan

$$
a_0 := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\widehat{f}_0 = \widehat{f}_0 + \widehat{f}_{-0}.
$$

Samoin voidaan määritellä myös $b_0 = 0$. Ollaan siis todistettu seuraava tulos

Lause 6.11 *Oletetaan, että $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on 2π-**periodinen funktio**, joka on itseisesti integroituva välillä $[0, 2\pi]$. Kun $k \in \mathbb{N}_0$, määritellään*

$$
a_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, \qquad b_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx). \tag{6.12}
$$

*Näitä kertoimia vastaava **trigonometrinen sarja** pisteessä x on*

$$
S(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right], \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{6.13}
$$

Tämä sarja suppenee, jos ja vain jos vastaava Fourier'n sarja kertoimilla $(\widehat{f}_k)$ suppenee, ja tällöin sarjat suppenevat kohti samaa arvoa. Mikäli funktio f toteuttaa Dirichlet'n ehdot, on $S(x) = f(x)$ jokaisessa pisteessä x, jossa f on jatkuva.

Trigonometrinen sarja on kätevä erityisesti, jos f on reaaliarvoinen funktio tai jos se on parillinen tai pariton. Nimittäin, jos $f(x) \in \mathbb{R}$ kaikilla x, on määritelmien (6.12) integrandit reaaliarvoisia, joten pätee $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, ja trigonometrinen sarja (6.13) sisältää vain reaalisia termejä. Sen sijaan funktion f Fourier'n kertoimille saadaan tällöin vain ominaisuus

$$\widehat{f}_k^* = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x\right)^* = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right)^*\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = \widehat{f}_{-k}\,.$$

Tästä ominaisuudesta seuraa myös jo itsessään, että Fourier'n sarja $S(x)$ antaa jokaisessa suppenemispisteessään reaalisen arvon: jos $\widehat{f}_k^* = \widehat{f}_{-k}$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$ ja Fourier'n sarja suppenee pisteessä x, pätee

$$S(x)^* = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{f}_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right)^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\widehat{f}_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right)^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{f}_{-k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} = \sum_{k'=-\infty}^{\infty}\widehat{f}_{k'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x} = S(x)\,,$$

eli tällöin $S(x) \in \mathbb{R}$.

Jos taas f on parillinen tai pariton, on puolet trigonometrisen sarjan kertoimista nollia integrandin parillisuusominaisuuksiin nojaten, ks. Luku 5.5.2. Esimerkiksi, jos f on *parillinen*, on myös funktio $f(x)\cos(kx)$ parillinen, mutta funktio $f(x)\sin(kx)$ on pariton, joten tällöin saadaan

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)\mathrm{d}x\,, \quad b_k = 0 \quad\Rightarrow\quad S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx)\,. \tag{6.14}$$

Vastaavasti, kun f on *pariton*, pätee

$$a_k = 0\,, \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\mathrm{d}x \quad\Rightarrow\quad S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin(kx)\,. \tag{6.15}$$

Esimerkin 6.8 periodinen jatkehan on pariton funktio, joten tämä selittää, miksi sen Fourier'n sarja oli kirjoitettavissa pelkästään funktioiden $\sin(kx)$ avulla.

Taulukossa 6.1 on yhteenveto yllä johdetuista trigonometristen ja Fourier'n sarjojen perusominaisuuksista.

Esimerkki 6.12 Laske funktion $f(x) = x^2$ trigonometrinen sarja välillä $[-\pi, \pi]$.
Ratkaisu: Olkoon g funktion f periodinen jatke väliltä $]-\pi,\pi]$. Tällöin $g(x) = f(x) = f(-x) = g(-x)$, kun $-\pi < x < \pi$, joten g on parillinen funktio sen trigonometriset kertoimet määrittelevissä integraaleissa (6.12). Lisäksi g perii f:n jatkuvuuden kaikkiin näihin pisteisiin ja toisaalta päätepisteissä pätee $g((-\pi)^+) = (-\pi)^2 = \pi^2 = g(\pi) = g(-\pi)$, joten g on jatkuva koko reaaliakselilla ja toteuttaa Dirichlet'n ehdot. (Kuvassa 6.1 oikealla puolella on annettu funktioiden f ja g kuvaajat.) g:n parillisuudesta seuraa, että sen trigonometrisille kertoimille on $b_k = 0$, kaikilla $k \in \mathbb{N}_0$, ja

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\cos(kx)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(kx)\mathrm{d}x\,.$$

Näin ollen

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\Big/_0^{\pi}\frac{1}{3}x^3 = 2\frac{\pi^2}{3}\,,$$

Taulukko 6.1: Yhteenveto 2π-periodisen funktion f Fourier'n ja trigonometristen sarjojen $S(x)$ perusominaisuuksista, kun funktio f on esitettävissä sarjan S avulla, eli toteuttaa esimerkiksi Dirichlet'n ehdot.

- S on reaaliarvoinen, jos ja vain jos $\widehat{f}_k^* = \widehat{f}_{-k}$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$.
- S on reaaliarvoinen, jos ja vain jos $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ kaikilla $k \in \mathbb{N}_0$.
- Jos f on parillinen, on $b_k = 0$ kaikilla k.
- Jos f on pariton, on $a_k = 0$ kaikilla k.

ja, kun $k \in \mathbb{N}$, voidaan integraali laskea kaksi kertaa osittaisintegroimalla,

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}a_k &= \int_0^\pi x^2\cos(kx)\mathrm{d}x = \Big/_0^\pi x^2\frac{1}{k}\sin(kx) - \int_0^\pi 2x\frac{1}{k}\sin(kx)\mathrm{d}x \\ &= 0 - \frac{2}{k}\left(\Big/_0^\pi x\frac{-1}{k}\cos(kx) - \int_0^\pi \frac{-1}{k}\cos(kx)\mathrm{d}x\right) = \frac{2}{k^2}\left(\pi\cos(k\pi) - 0 - \Big/_0^\pi \frac{1}{k}\sin(kx)\right) \\ &= \frac{2}{k^2}\pi(-1)^k\,.\end{aligned}$$

Näin ollen $a_k = (-1)^k\frac{4}{k^2}$, joten funktion g trigonometriseksi sarjaksi saadaan

$$S(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos(kx)\,.$$

Huomataankin, että päinvastoin kuin Luvun ensimmäisessä esimerkissä, on tämä sarja itseisesti suppeneva, sillä $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \infty$, joka on sopusoinnussa g jatkuvuuden kanssa. Lausetta 6.5 tai Dirichlet'n lausetta soveltamalla saadaan siis $S(x) = x^2$, kun $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, sillä g on jatkuva kaikkialla, mukaan lukien välin päätepisteet. Erityisesti $S(0) = 0$, joten tämän Fourier'n sarjan avulla saadaan ratkaistua erään sarjan eksakti arvo:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}\,.$$

Toisaalta, kun $x = \pi$, on sarjassa $\cos(k\pi) = (-1)^k$, joten sen avulla ratkeaa myös eräs Riemannin ζ-funktion eksakti arvo:

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{4}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}\,.$$