

Tämä funktion on analyyttinen lukuun ottamatta ensimmäisen kertaluvun napoja negatiivisen reaaliakselin pisteissä  $z = -m$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , joissa sen residyt ovat  $\text{Res}(\Gamma, -m) = \frac{(-1)^m}{m!}$ .

Seuraavaa tulosta varten tarvitaan **analyyttisten funktioiden osittaisintegroitikaavaa**:

**Lause 5.6** *Olko  $\gamma$  jokin polku, joka kulkee pisteestä  $z_0$  pisteeseen  $z_1$  alueessa  $\Omega$ . Jos funktiot  $f$  ja  $g$  ovat analyyttisiä alueessa  $\Omega$ , niin pätee*

$$\int_{\gamma} f'(z)g(z)dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)g'(z)dz - \int_{\gamma} f(z)g'(z)dz. \quad (5.8)$$

**TODISTUS** Oletusten mukaan myös tulofunktio  $F(z) = f(z)g(z)$  on analyyttinen alueessa  $\Omega$ . Sen derivaatta on  $F'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$ , joten Lauseesta 1.32 seuraa, että

$$F(z_1) - F(z_0) = \int_{\gamma} F'(z)dz = \int_{\gamma} f'(z)g(z)dz + \int_{\gamma} f(z)g'(z)dz.$$

Tästä seuraa suoraan kaava (5.8). □

Tätä tulosta voidaan soveltaa erityisesti funktioihin  $f(t) = -e^{-t}$  ja  $g(t) = t^z$  oikeassa puolitasossa, jolloin  $f'(t) = e^{-t}$  ja  $g'(t) = \partial_t \exp(z \ln t) = z \frac{1}{t} \exp(z \ln t) = z t^{z-1}$ . Näin ollen määritelmästä (5.4) saadaan osittaisintegroimalla tulos

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt = \int_0^{\infty} (-t^z e^{-t}) - \int_0^{\infty} z t^{z-1} (-e^{-t}) dt = z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt,$$

jossa tarvitaan  $\text{Re } z > 0$ , jotta sijoitustermit varmasti häviäisivät. Tällöin oikean puolen integraali saa arvon  $z\Gamma(z)$ , joten ollaan päädytty tulokseen

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad (5.9)$$

joka pätee ainakin kun  $\text{Re } z > 0$ . Toisaalta  $\Gamma$ -funktion yleisen määritelmän mukaan yhtälön vasen puoli on analyyttinen funktio, kunhan  $z+1 \neq -m$ ,  $m \in \mathbb{N}_0$ , eli  $z \neq -n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ja sen oikea puoli on analyyttinen funktio, kun  $z \neq -m$ ,  $m \in \mathbb{N}_0$ . Luvun 5.1 alun perusteella, täytyy kaavan (5.9) siis päteä kaikilla  $z \neq -m$ ,  $m \in \mathbb{N}_0$  ja itse asiassa myös raja-arvomielessä kun  $z \rightarrow 0$ .

Tulosta (5.9)  $n$  kertaa iteroimalla saadaan yleisempi tulos

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)(z+n-2) \cdots z\Gamma(z), \quad \text{kun } n \in \mathbb{N} \text{ ja } z \notin (-\mathbb{N}_0). \quad (5.10)$$

Arvolla  $z = 1$  tästä seuraa

$$\Gamma(n+1) = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = n! \cdot \Gamma(1).$$

Koska  $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} t^{1-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} (-e^{-t}) = 1$ , nähdään, että  **$\Gamma$ -funktio yleistää kertomafunktion kompleksitasoon**, sillä

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \text{kun } n \in \mathbb{N}. \quad (5.11)$$

Johdetaan vielä lopuksi seuraava  $\Gamma$ -funktioiden kertolaskuominaisuus ja kerrataan samalla useita integraalinlaskentatemppuja:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad \text{kun } z \notin \mathbb{Z}. \quad (5.12)$$

Aloitetaan olettamalla, että  $z \in ]0, 1[$ , jolloin sekä  $\text{Re } z = z > 0$  että  $\text{Re}(1-z) = 1-z > 0$ , joten voidaan käyttää molempiin termeihin kaavan (5.4) integraaliesitystä. Tehdään ensimmäiseen

termiin muuttujanvaihto  $u = \sqrt{t}$ , jolle  $t = u^2$  ja siten  $\frac{dt}{du} = 2u > 0$ , joten muuttujanvaihdossa integrointiväli  $]0, \infty[$  säilyy ennallaan. Saadaan

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty u^{2z-2} e^{-u^2} 2u du = 2 \int_0^\infty u^{2z-1} e^{-u^2} du. \quad (5.13)$$

Näin ollen myös

$$\Gamma(1-z) = 2 \int_0^\infty v^{2(1-z)-1} e^{-v^2} dv = 2 \int_0^\infty v^{1-2z} e^{-v^2} dv,$$

joten

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{u}{v}\right)^{2z-1} e^{-u^2-v^2} dudv.$$

Tässä voidaan<sup>2</sup> ymmärtää iteroitu integraali kaksiulotteisena integraalina, joka otetaan joukon  $(\mathbb{R}_+)^2 := \{(u, v) \mid u, v > 0\}$  yli. Siirrytään kaksiulotteisessa integraalissa napakoordinaatteihin  $r = \sqrt{u^2 + v^2}$  ja  $\varphi = \text{Arg}(u, v)$ , jolloin  $u = r \cos \varphi$  ja  $v = r \sin \varphi$ , jossa  $r > 0$  ja  $\varphi \in [0, \pi/2]$ . Muistaen siirtoon liittyvän Jacobin determinantin, pätee  $dudv = r dr d\varphi$  ja saadaan siis tulos

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^\infty dr r \left(\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}\right)^{2z-1} e^{-r^2} = 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi (\cot \varphi)^{2z-1} \times \int_0^\infty dr r e^{-r^2}.$$

Tässä  $r$ -integraali voidaan laskea suoraan muuttujanvaihdolla  $t = r^2$ , josta saadaan  $\int_0^\infty dr 2r e^{-r^2} = \int_0^\infty dt e^{-t} = \int_0^\infty (-e^{-t}) = 1$ . Näin ollen

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi (\cot \varphi)^{2z-1}.$$

Jäljellä olevan integraalin laskeminen onkin vähän hankalampaa. Tehdään siinä ensin muuttujanvaihto  $x = (\cot \varphi)^2$ , jolle pätee  $\frac{dx}{d\varphi} = 2 \cot \varphi \frac{d \cot \varphi}{d\varphi} = 2 \cot \varphi \frac{-\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} = -2 \cot \varphi (1 + \cot^2 \varphi)$ . Kun  $0 < \varphi < \pi/2$  ovat sen sini ja kosini molemmat positiivisia, joten myös  $\cot \varphi > 0$ . Nähdään, että  $\frac{dx}{d\varphi} < 0$  koko integrointivälillä, joten muuttujanvaihto on aidosti vähenevä koko integrointivälillä ja kuvaa sen (bijektiivisesti) joukoksi  $]0, \infty[$ . Saadaan siis

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi (\cot \varphi)^{2z-1} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} d\varphi 2 \cot \varphi (1 + \cot^2 \varphi) \frac{1}{1 + \cot^2 \varphi} (\cot \varphi)^{2z-2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty dx \frac{x^{z-1}}{1+x}.$$

Tämä viimeinen integraali voidaan laskea residylausetta soveltamalla. Lasku on tehty Esimerkissä 3.28, jonka mukaan

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{z-1}}{1+x} = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Keräämällä kaikki yllä johdetut tulokset yhteen, päädytään tulokseen

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad \text{kun } 0 < z < 1.$$

Vasen puoli on kahden analyyttisen funktion tulo alueessa, jossa kompleksitasosta on poistettu napapisteet  $z = 0, -1, \dots$  ja  $1 - z = 0, -1, -2, \dots$ , eli pisteet  $z \in \mathbb{Z}$ . Toisaalta  $\sin \pi z = 0$ , jos ja vain jos  $z \in \mathbb{Z}$ , joten myös oikea puoli on analyyttinen funktio tässä samassa alueessa. Koska nämä kaksi analyyttistä funktiota saavat samat arvot janalla  $]0, 1[$  täytyy niiden olla samoja koko alueessa. Saatiin siis johdettua haluttu kaava (5.12).

<sup>2</sup>(MAT) Tuloksessa käytetään Fubinin lausetta esittämään iteroitu integraali tuloavaruuden yli otettuna integraalina. Lausetta saa käyttää, sillä integrandi on positiivinen mitallinen funktio tuloavaruudessa.

Taulukko 5.1: Yhteenveto Eulerin  $\Gamma$ -funktion ominaisuuksista.

$\Gamma$ -funktio on analyyttinen, lukuun ottamatta ensimmäisen kertaluvun napoja pisteissä  $z = 0, -1, -2, \dots$ ,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \text{kun } \operatorname{Re} z > 0$$

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \text{kun } z \neq 0, -1, -2, \dots$$

Seuraavat ominaisuudet pätevät kaikkialla kompleksitasossa napapisteitä lukuun ottamatta:

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n!, & \text{kun } n \in \mathbb{N} \\ \Gamma(z+1) &= z\Gamma(z), & \text{kun } z \neq 0, -1, -2, \dots \\ \frac{\Gamma(n+p)}{\Gamma(p)} &= (p+n-1)(p+n-2)\cdots p, & \text{kun } n \in \mathbb{N} \text{ ja } p > 0 \\ \Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \frac{\pi}{\sin \pi z}, & \text{kun } z \notin \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Kaavoja (5.12) ja (5.10) käyttämällä voi laskea tarkkoja  $\Gamma$ -funktion arvoja puoliluvuille  $z = n + \frac{1}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Kaavasta (5.12) saadaan arvolla  $z = \frac{1}{2}$  tulos  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi$  ja toisaalta integraaliesityksestä (5.4) nähdään suoraan, että  $\Gamma(z) > 0$ , kun  $z > 0$ , joten täytyy olla

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Tämän jälkeen kaavasta (5.10) saadaan arvolla  $z = \frac{1}{2}$  tulos

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \prod_{k=1}^n \left(k - \frac{1}{2}\right) \sqrt{\pi}, \quad \text{kun } n \in \mathbb{N},$$

ja vastaavasti arvolla  $z = -n + \frac{1}{2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tulos

$$\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n \sqrt{\pi}}{\prod_{k=1}^n \left(k - \frac{1}{2}\right)}, \quad \text{kun } n \in \mathbb{N}.$$

Yhteenveto Eulerin  $\Gamma$ -funktion tärkeimmistä ominaisuuksista löytyy Taulukosta 5.1 ja lisää tietoa, kuten esimerkiksi kuvaajia funktion arvoista kompleksitasossa, löytyy esimerkiksi Wikipediasta ([https://en.wikipedia.org/wiki/Gamma\\_function](https://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_function)).

**Esimerkki 5.7** Kun  $p > 1$ , esitä seuraavan integraalin arvo Eulerin  $\Gamma$ -funktion ja Riemannin  $\zeta$ -funktion avulla

$$I(p) := \int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^{p-1}}{x(x+1)} dx. \quad (5.14)$$

*Ratkaisu:* Hankkiudutaan ensin eroon logaritmista integraalissa ottamalla se uudeksi integrointi-muuttujaksi: tehdään muuttujanvaihto  $t = \ln x$ , jolle  $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} > 0$ , ja se siis kuvaa integrointivälin  $[1, \infty[$  väliksi  $[0, \infty[$ . Tällöin  $x = e^t$  ja saadaankin

$$I(p) = \int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^{p-1}}{x(x+1)} dx = \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{1+e^t} dt = \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1} e^{-t}}{1+e^{-t}} dt,$$

joka alkaakin jo muistuttaa  $\Gamma$ -funktion määritelmää. Integraalissa  $t > 0$ , joten  $0 < e^{-t} < 1$ , ja voidaan siis kehittää nimittäjän sisältävä termi geometriseksi sarjaksi,

$$\frac{1}{1 + e^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-e^{-t})^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-nt}.$$

Tämän voi sijoittaa yllä olevaan integraaliin ja vaihtaa integroinnin ja summauksen järjestystä,<sup>3</sup> josta saadaan

$$I(p) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} e^{-nt} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-(n+1)t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-(n+1)t} dt.$$

Tekemällä muuttujanvaihto  $u = (n+1)t$ , saadaan lopulta

$$\begin{aligned} I(p) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{n+1}\right)^{p-1} e^{-u} \frac{1}{n+1} du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^p} \int_0^{\infty} u^{p-1} e^{-u} du \\ &= \Gamma(p) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m^p}, \end{aligned}$$

missä viimeisessä vaiheessa on tehty summausmuuttujan vaihto  $m = n+1$ . Merkitään jäljellä olevaa sarjaa  $S(p) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m^p}$ . Vielä pitäisi esittää sarjan arvo  $\zeta$ -funktiota käyttäen. Huomataan, että itseisarvojen muodostama sarja on itse asiassa Dirichlet'n sarja  $\sum_{m=1}^{\infty} m^{-p} < \infty$ , sillä  $p > 1$  ja sarja suppenee niin kuin Esimerkissä 2.21 näytettiin. Näin ollen voidaan sen positiiviset termit (parittomat  $m$ ) ja negatiiviset termit (parilliset  $m$ ) summata erikseen, ja pätee

$$\begin{aligned} S(p) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^p} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^p} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^p} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^p} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} - 2^{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = (1 - 2^{1-p})\zeta(p). \end{aligned}$$

*Vastaus:*  $I(p) = (1 - 2^{1-p})\Gamma(p)\zeta(p)$ , kun  $p > 1$ .

### 5.3 Eulerin B-funktio

**Eulerin betafunktion** määritelmä lähtee liikkeelle integraalista

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad \text{kun } \operatorname{Re} p, \operatorname{Re} q > 0.$$

Koska integrandin itseisarvolle pätee  $|t^{p-1}(1-t)^{q-1}| = t^{\operatorname{Re} p-1}(1-t)^{\operatorname{Re} q-1}$  suppenee se itseisesti yllä merkityillä arvoilla  $\operatorname{Re} p, \operatorname{Re} q > 0$  (integraalin voi tehdä kahdessa osassa, ensin yli arvojen  $0 < t < \frac{1}{2}$ , jolloin  $1-t \geq \frac{1}{2}$  ja siten  $(1-t)^{\operatorname{Re} q-1} \leq 2$ , ja sen jälkeen yli arvojen  $\frac{1}{2} \leq t < 1$ , jolloin  $t^{\operatorname{Re} p-1} \leq 2$ ). Tästä nähdään myös, että integraalin määräämä funktio on analyyttinen sekä muuttajassa  $p$ , kun  $q$  on kiinnitetty, että muuttajassa  $q$ , kun  $p$  on kiinnitetty (esimerkiksi, jos  $D$  on suljettu kuula oikeassa puolitasossa ja  $\operatorname{Re} q > 0$ , löytyy  $\varepsilon > 0$ , jolla  $\operatorname{Re} p \geq \varepsilon$  ja siten  $|t^{p-1}(1-t)^{q-1}| \leq t^{\varepsilon-1}(1-t)^{\operatorname{Re} q-1}$  kaikilla  $p \in D$ ). Tämän jälkeen B-funktiolle tehdään analyyttinen

<sup>3</sup>(MAT) Järjestyksen vaihdon voi perustella käyttäen luvun 2.2.1 tulosta "(2)". Nimittäin itseisarvojen yli summatussa saadaan geometrinen sarja  $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} = 1/(1-e^{-t}) \leq 1+t^{-1}$ . (Tässä esiintyvän epäyhtälön voi todistaa tutkimalla funktiota  $g(t) := e^{-t}(1+t)$ ,  $t \geq 0$ : koska  $g(0) = 1$  ja  $g'(t) = -(1+t)e^{-t} + e^{-t} = -te^{-t} \leq 0$ , on funktio  $g$  siis vähenevä ja pätee  $g(t) \leq 1$  kaikilla  $t \geq 0$ . Tästä seuraa ensin epäyhtälö  $e^{-t} \leq \frac{1}{1+t}$ , josta edelleen  $1 - e^{-t} \geq \frac{t}{1+t}$ .) Näin ollen  $\int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} dt \leq \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} (1+t^{-1}) dt = \Gamma(p) + \Gamma(p-1) < \infty$ , sillä oletettiin, että  $p > 1$ .

jatke muualle kompleksitasoon samaan tapaan kuin  $\Gamma$ -funktiolle tehtiin edellisessä luvussa. Jatke on helpointa tehdä johtamalla samalla esitys B-funktiolle  $\Gamma$ -funktion avulla.

Oletetaan siis ensin, että  $p, q > 0$ , jolloin voidaan käyttää kaavassa (5.13) johdettua integraaliesitystä arvoille  $\Gamma(p)$  ja  $\Gamma(q)$ . Tästä saadaan

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 2 \int_0^\infty u^{2p-1} e^{-u^2} du \times 2 \int_0^\infty v^{2q-1} e^{-v^2} dv = 4 \int_0^\infty du \int_0^\infty dv u^{2p-1} v^{2q-1} e^{-u^2-v^2}.$$

Kuten edellisessä luvussa, tehdään tässä kaksiulotteisessa integraalissa muuttujanvaihto napakoordinaatteihin:  $u = r \cos \varphi$  ja  $v = r \sin \varphi$ , jossa  $r > 0$  ja  $\varphi \in [0, \pi/2]$ . Saadaan tulos

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^\infty dr r r^{2p-1} r^{2q-1} (\cos \varphi)^{2p-1} (\sin \varphi)^{2q-1} e^{-r^2} \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi (\cos \varphi)^{2p-1} (\sin \varphi)^{2q-1} \times \int_0^\infty dr 2r r^{2(p+q-1)} e^{-r^2}. \end{aligned}$$

Tässä jälkimmäisestä integraalista muuttujanvaihdolla  $t = r^2$  saadaan  $\int_0^\infty dr 2r r^{2(p+q-1)} e^{-r^2} = \int_0^\infty dt t^{p+q-1} e^{-t} = \Gamma(p+q)$ , sillä  $p+q > 0$ . Tehdään kulmaintegraaliin muuttujanvaihto  $x = (\cos \varphi)^2$ , jolloin  $\frac{dx}{d\varphi} = -2 \cos \varphi \sin \varphi < 0$  kun  $0 < \varphi < \pi/2$ . Muuttujanvaihto on siis aidosti vähenevä koko integrointivälillä ja kuvaa sen (bijektiivisesti) joukoksi  $]0, 1[$ . Saadaan

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi (\cos \varphi)^{2p-1} (\sin \varphi)^{2q-1} &= \int_0^{\pi/2} d\varphi 2 \cos \varphi \sin \varphi (\cos \varphi)^{2(p-1)} (\sin \varphi)^{2(q-1)} \\ &= \int_0^1 dx x^{p-1} (1-x)^{q-1} = B(p, q), \end{aligned}$$

sillä  $(\sin \varphi)^2 = 1 - (\cos \varphi)^2$ .

Ollaan siis johdettu tulos  $\Gamma(p)\Gamma(q) = B(p, q)\Gamma(p+q)$  arvoille  $p, q > 0$ . Kuten aiemmin mainittiin, seuraa integraaliesityksestä (5.4), että  $\Gamma(p, q) > 0$  kun  $p+q > 0$ , joten saadaan yhtälö

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad (5.15)$$

joka pätee aina kun  $p, q > 0$ . Tämän jälkeen, kun  $q > 0$ , nähdään että yhtälö pätee kaikilla  $\operatorname{Re} p > 0$  aiemmin johdettujen analyyttisyysominaisuuksien takia muuttujassa  $p$ . Lopulta voidaan valita jokin  $\operatorname{Re} p > 0$  ja käyttää hyväksi molempien puolien analyyttisyyttä muuttujassa  $q$  ja nähdään, että se pätee kaikilla  $\operatorname{Re} p, \operatorname{Re} q > 0$ . Yhtälön oikea puoli tarjoaa tämän jälkeen analyyttisen jatkeen funktiolle  $B(p, q)$  kunhan  $p, q, p+q \neq 0, -1, -2, \dots$  ja  $\Gamma(p+q) \neq 0$ .

Yhteenvedo Eulerin B-funktion tärkeimmistä ominaisuuksista löytyy Taulukosta 5.2 ja lisää tietoa, kuten esimerkiksi kuvaajia funktion arvoista kompleksitasossa, löytyy esimerkiksi Wikipediasta ([https://en.wikipedia.org/wiki/Beta\\_function](https://en.wikipedia.org/wiki/Beta_function)).

**Esimerkki 5.8** Kun  $p > \frac{3}{2}$ , esitä seuraavan integraalin arvo Eulerin B-funktion avulla

$$I(p) := \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+4)^p} dx. \quad (5.16)$$

*Ratkaisu:* Tavoitteena olisi päästä muuttujanvaihdolla integraaliin välin  $]0, 1[$  yli. Tehdään tämä siten, että integrandissa oleva yleinen potenssi tuottaa termin  $t^p$ , joka onnistuu valinnalla

$$t = \frac{x^2}{x^2+4}, \quad x > 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{4t}{1-t}, \quad 0 < t < 1 \quad \Rightarrow \quad 2x \frac{dx}{dt} = \frac{4}{(1-t)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} > 0.$$

Taulukko 5.2: Yhteenveto Eulerin B-funktion ominaisuuksista.

Eulerin betafunktiolle pätee

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt, \quad \text{kun } \operatorname{Re} p, \operatorname{Re} q > 0$$

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = B(q, p)$$

B-funktion on analyyttinen sekä argumentissa  $p$  että  $q$ , pois lukien  $\Gamma$ -funktioiden navat ja arvot, joilla  $\Gamma(p+q) = 0$ .

B-funktion avulla voi laskea binomikertoimia:

$$B(n+1, m+1) = \frac{n!m!}{(n+m+1)!} = \left[ (n+m+1) \binom{n+m}{n} \right]^{-1}, \quad \text{kun } n, m \in \mathbb{N}$$

Tästä nähdään, että muuttujanvaihto kuvaa integrointivälin kasvavasti väliksi  $]0, 1[$ , ja saadaan

$$I(p) = \int_0^\infty \left( \frac{x^2}{x^2+4} \right)^p (x^2)^{1-p-\frac{1}{2}} x dx = \int_0^1 t^p \left( \frac{4t}{1-t} \right)^{\frac{1}{2}-p} \frac{2}{(1-t)^2} dt$$

$$= \int_0^1 2^{2(\frac{1}{2}-p)+1} t^{p+\frac{1}{2}-p} (1-t)^{p-\frac{1}{2}-2} dt = 2^{2-2p} \int_0^1 t^{\frac{3}{2}-1} (1-t)^{p-\frac{3}{2}-1} dt.$$

Viimeinen integraali antaa Eulerin B-funktion arvon  $B\left(\frac{3}{2}, p - \frac{3}{2}\right)$ , sillä  $p - \frac{3}{2} > 0$ .

*Vastaus:*  $I(p) = 2^{2-2p} B\left(\frac{3}{2}, p - \frac{3}{2}\right)$ , kun  $p > \frac{3}{2}$ .

## 5.4 Asymptoottiset sarjakehitykset

**Asymptoottiset sarjakehitykset** ovat jonkin annetun funktion  $f(x)$  approksimointiin käytettyjä muodollisesti sarjoilta näyttäviä kehityksiä

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (x \rightarrow \infty), \quad (5.17)$$

jossa ei kuitenkaan vaadita, että sarja  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  suppenisi millään kiinteällä  $x$ . Tämän sijaan vaaditaan, että sarjan osasummat  $S_N(x) := \sum_{n=1}^N u_n(x)$  muodostavat yhä paremman approksimaation

funktiosta  $f(x)$  yllä sulussa merkityllä rajalla, kun  $x \rightarrow \infty$ . Toisin sanoen, sarjan osasummat antavat mielivaltaisen hyvän kuvan funktion  $f$  käytöksestä *asymptoottisesti*, kun  $x \rightarrow \infty$ .

Tällaisen asymptoottisen approksimaation virhettä on helpointa kuvata käyttäen *suuruusluokkanotaatioita* ” $O$ ” ja ” $o$ ” (näiden määritelmät ja perusominaisuuksia on kerrattu Luvussa 5.4.1). Asymptoottisten sarjakehitysten yleinen matemaattinen määritelmä lähtee liikkeelle **skaalifunktiojonon**  $w_n(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , valinnalla, jossa oletetaan, että jokainen funktioista on jatkuva ja häviää aina nopeammin kuin edeltäjänsä: oletetaan, että  $w_n(x) = o(w_{n-1}(x))$ , kun  $x \rightarrow \infty$ . Tyypillinen valinta voisi olla  $w_n(x) := x^{-n}$ . Tämän jälkeen oletetaan, että jokainen yllä olevista funktioista on muotoa  $u_n(x) = a_n w_n(x)$ , jollakin vakiolla  $a_n$ , ja sanotaan, että jono  $(u_n)$  muodostaa funktion  $f$  asymptoottisen sarjan, kun  $x \rightarrow \infty$ , jos kaikilla  $N \in \mathbb{N}$  pätee

$$f(x) = \sum_{n=1}^N u_n(x) + o(w_N(x)) \quad (x \rightarrow \infty).$$

Tällöin käytetään kaavan (5.17) lyhennysmerkintää. Esimerkiksi tapauksessa  $w_n(x) = x^{-n}$ ,  $n = -1, 0, 1, \dots$ , saadaan

$$f(x) \sim \sum_{n=-1}^{\infty} a_n x^{-n} \quad (x \rightarrow \infty) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^N \left| f(x) - \sum_{n=-1}^N a_n x^{-n} \right| = 0, \quad \text{kaikilla } N \in \mathbb{N}.$$

Koska vaadittu ehto sisältää pelkästään jonon  $(u_n)$  äärellisiä osasummia, ei tässä tarvitse vaatia varsinaisen sarjan  $\sum_{n=-1}^{\infty} u_n(x)$  suppenemista millään  $x$  tai raja-arvon  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  olomassaoloa.

Yllä olevan määritelmän hyvä puoli on, että silloin voidaan samalla skaalafunktion kehittyneitä sarjoja usein laskea yhteen, kertoa keskenään ja integroida, ja tuloksena on uusi vastaavanlainen asymptoottinen sarja. Lisää näin määriteltyjen asymptoottisten sarjakehitelmien ominaisuuksista löytyy Wikipediasta ([https://en.wikipedia.org/wiki/Asymptotic\\_expansion](https://en.wikipedia.org/wiki/Asymptotic_expansion)).

Tutustutaan seuraavaksi kolmeen työkaluun, joita voi käyttää numeerisessa laskennassa ja jotka joskus ovat ainoa vaihtoehto ylipäätään laskea mikä annetun funktion asymptoottinen käytös on. Nämä tekniikat tuottavat hyviä approksimaatioita asymptoottisina sarjakehitelminä, jotka usein eivät kuitenkaan supene normaalisti sarjojen mielessä.

1. Funktion approksimointi Taylorin polynomilla, kun sen Taylorin sarja ei suppene.
2. Integraalien approksimointi satulapistemenetelmällä.
3. Eulerin–Maclaurinin summakaava.

Näistä kaksi jälkimmäistä käsitellään omilla luvuissaan myöhemmin. Ensimmäiseen liittyvä esimerkki perustuu Taylorin lauseeseen: lause ja siihen liittyvä Taylorin polynomin ja jäännöstermin määritelmä on kerrattu Luvussa 5.4.2.

**Esimerkki 5.9** Olkoon  $p > 0$ . Etsitään seuraavan integraalilla määritellyn funktion asymptoottinen sarjakehitelmä, kun  $x \rightarrow 0$ ,

$$f(x) := \int_0^{\infty} e^{-u} (1+ux)^{-p}, \quad \text{kun } x \geq 0. \quad (5.18)$$

*Ratkaisu:* Koska  $u, x, p \geq 0$ , on integrandissa  $(1+ux)^{-p} \leq 1$ , joten se on itseisesti integroitava kaikilla  $x \geq 0$ . Sen sijaan, jos  $x < 0$ , syntyy integrointireitille singulariteetti pisteeseen  $u = |x|^{-1}$ , ja itseisesti integroitavuus ei enää pidä paikkaansa arvoilla  $p > 1$ . Näin ollen ei tule yllätyksenä, että tällä funktiolla ei ole suppenevaa Taylorin sarjaa pisteessä  $x = 0$ , niin kuin kohta nähdään.

Huomataan ensin, että funktiolla  $f$  löytyy kaikkien kertalukujen derivaatat, jotka saadaan siirtämällä derivoinnit integraalin sisälle:<sup>4</sup>

$$f^{(k)}(x) := (-1)^k p(p+1) \cdots (p+k-1) \int_0^{\infty} e^{-u} u^k (1+ux)^{-p-k} du, \quad x > 0, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5.19)$$

(Kaava seuraa suoraan derivaatoista  $\partial_x (1+ux)^{-p-k} = -(p+k)(1+ux)^{-p-k-1}u$ , ja sen voi tarkistaa induktiolla.) Voidaan siis käyttää Taylorin lausetta (Lause 5.13), ja mille tahansa kehityspisteelle  $x_0$  ja asteelle  $n \in \mathbb{N}$ , saadaan approksimaatio Taylorin polynomin

$$P_n(x; x_0) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k = \sum_{k=0}^n a_k (x-x_0)^k \frac{1}{k!} \int_0^{\infty} e^{-u} u^k (1+ux_0)^{-p-k} du,$$

<sup>4</sup>(MAT) Kaavassa (5.19) määriteltyjen funktioiden  $f^{(k)}$  jatkuvuus seuraa suoraan dominoidun konvergenssin lauseesta, jolla voi todistaa, että  $\lim_{x \rightarrow x_0} f^{(k)}(x) = f^{(k)}(x_0)$ . Sen, että niiden derivaatan voi laskea derivoimalla integrandia, voi myös todistaa dominoidun konvergenssin lauseen avulla suoraan erotusosamääriä  $[f^{(k)}(x+h) - f^{(k)}(x)]/h$  tarkastelemalla: tätä varten voi käyttää seuraavaa integraaliesitystä arvolla  $q = p+k > 0$

$$\frac{1}{h} [(1+ux+uh)^{-q} - (1+ux)^{-q}] = \frac{1}{h} \int_{s=0}^{s=1} (1+ux+uhs)^{-q} = \frac{(-q)uh}{h} \int_0^1 (1+ux+uhs)^{-q-1} ds,$$

jonka itseisarvo on rajoitettu  $h$ :sta riippumattomalla arvolla  $qu$ , kunhan  $x+h \geq 0$ .

avulla, jossa  $a_0 = 1$  ja

$$a_k := (-1)^k p(p+1) \cdots (p+k-1) = (-1)^k \frac{\Gamma(p+k)}{\Gamma(p)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Otetaan tässä  $x_0 \rightarrow 0$ , josta saadaan approksimaatio

$$P_n(x) := \sum_{k=0}^n a_k x^k \frac{1}{k!} \int_0^\infty e^{-u} u^k du = \sum_{k=0}^n a_k x^k \frac{\Gamma(k+1)}{k!} = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad x > 0.$$

Ollaan siis päädytty Taylorin sarjan osasummilta näyttävään potenssisarjaan. Sen suppenemissäde on kuitenkin nolla, sillä kun  $x \neq 0$ , pätee

$$\frac{|a_n x^n|}{|a_{n-1} x^{n-1}|} = |x| \frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(p)} \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+n-1)} = |x|(p+n-1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty,$$

joten d'Alembertin testin (Lause 2.17) mukaan potenssisarja ei suppene itseisesti millään  $x \neq 0$ .

Vaikka sarja  $\sum_{k=0}^n a_k x^k$  hajaantuukin, on se asymptoottisesti aina parempi approksimaatio funktion  $f$  käytökselle, kun  $x \rightarrow 0$ . Tämä nähdään palaamalla Taylorin lauseeseen, jonka mukaan asteen  $n$  **jäännöstermi**  $R_n(x; x_0) := f(x) - P_n(x; x_0)$  voidaan laskea kaavalla

$$R_n(x; x_0) := \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt,$$

josta seuraa, että etsitty virhe on

$$R_n(x) := f(x) - P_n(x) = \lim_{x_0 \rightarrow 0} (f(x) - P_n(x; x_0)) = \lim_{x_0 \rightarrow 0} \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt.$$

Koska

$$\begin{aligned} |f^{(n+1)}(t)| &= |a_{n+1}| \left| \int_0^\infty e^{-u} u^{n+1} (1+ut)^{-p-n-1} du \right| \\ &\leq |a_{n+1}| \int_0^\infty e^{-u} u^{n+1} du = |a_{n+1}| \Gamma(n+2) = |a_{n+1}| (n+1)!, \end{aligned}$$

nähdään, että

$$|R_n(x)| \leq \frac{|a_{n+1}| (n+1)!}{n!} \lim_{x_0 \rightarrow 0} \int_{x_0}^x (x-t)^n dt = \frac{|a_{n+1}| (n+1)!}{n!} \int_0^x \frac{-1}{n+1} (x-t)^{n+1} = |a_{n+1}| x^{n+1}.$$

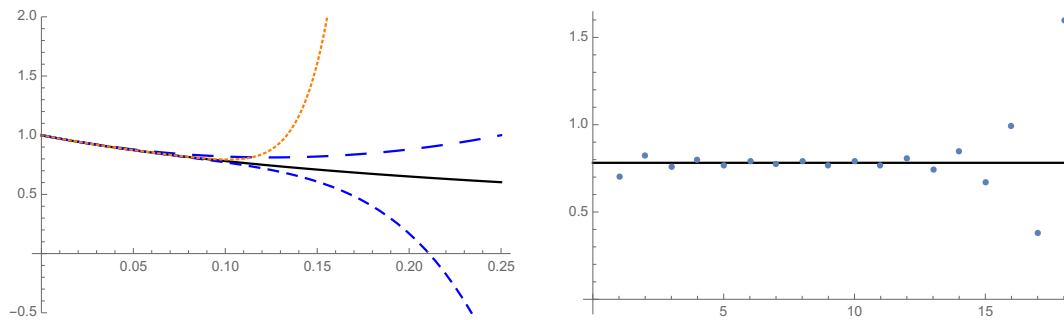
Tästä seuraa, että  $\frac{1}{x^n} |f(x) - P_n(x)| = O(x) \rightarrow 0$ , kun  $x \rightarrow 0$ . Voidaan siis päätellä, että  $P_n(x)$  on asymptoottinen sarja funktiolle  $f(x)$ , kun  $x \rightarrow 0$ .

*Vastaus:*

$$\int_0^\infty e^{-u} (1+ux)^{-p} du \sim \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{\Gamma(p+k)}{\Gamma(p)} x^k \quad (x \rightarrow 0^+). \quad (5.20)$$

Kuvassa 5.1 on näytetty miten yllä oleva approksimaatio käyttäytyy, kun sen astetta  $n$  kasvataan. Vaikka sarja ei voikaan tuottaa mielivaltaisen hyvää approksimaatiota niissä pisteissä, joissa se ei suppene, voi sillä saavuttaa erittäin hyvänkin tarkkuuden kiinteällä  $x$ :n arvolla, valitsemalla  $n$ :n arvo sopivasti niin, että jäännöstermi minimoituu. Esimerkiksi yllä  $|R_n(x)| \leq |a_{n+1}| x^{n+1} \leq [(p+n)x]^{n+1}$ , joten valitsemalla  $n$  kokonaislukuosaksi reaaliluvusta  $\frac{1}{2x} - p$ , on virhe eksponentiaalisen pieni,  $|R_n(x)| \leq 2^{-n-1}$ . Tällä valinnalla siis  $|R_n(x)| \leq 2^{p-1/(2x)}$ , kun  $0 < x \leq \frac{1}{2p}$ .





Kuva 5.1: Asymptoottisen sarjakehitelmän (5.20) käyttäytyminen, kun  $p = 3$ . (Vasen kuva) Alkuperäisen funktion  $f(x)$ ,  $x \in [0, 0.25]$ , kuvaaja on piirretty mustalla ja sen polynomiapproksimaatiot  $P_2(x)$ ,  $P_5(x)$  ja  $P_{10}(x)$  piirretty katkoviivoilla, joissa viivan tiheys kasvaa asteen  $n$  mukana ( $P_{10}$ :n kuvaaja vastaa oranssia katkoviivaa). Huomataan, että vaikka approksimaation tarkkuus koko ajan kasvaa origon ympäristössä, sen käyttöalue pienenee samalla. (Oikea kuva) Approksimaation käytös  $n$ :n kasvaessa: musta viiva vastaa arvoa  $f(0.1)$  ja pisteet polynomiapproksimaatioita  $P_n(0.1)$ , kun  $n = 1, 2, \dots, 18$ . Huomataan, että tarkkuus paranee kunnes  $n \approx 7$  ja alkaa sen jälkeen huonontua.

### Esimerkki 5.10 Ratkaise epätäydellisen $\Gamma$ -funktion

$$\Gamma(z, r) := \int_r^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad r > 0, \quad (5.21)$$

asymptoottinen käytös, kun  $z < 1$  ja  $r \rightarrow \infty$ . (Tällöin  $\Gamma(z, 0) = \Gamma(z)$ , kun  $\operatorname{Re} z > 0$ .)

Ratkaisu: Tehdään muuttujanvaihto  $u = t - r$ , josta saadaan

$$\Gamma(z, r) := \int_x^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty (r+u)^{z-1} e^{-r-u} du = e^{-r} r^{z-1} \int_0^\infty (1+u/r)^{-(1-z)} e^{-u} du.$$

Näin ollen tämä arvo onkin  $e^{-r} r^{z-1} f(1/r)$ , jossa  $f$  on edellisen esimerkin kaavassa (5.18) määritelty funktio arvolla  $p = 1 - z > 0$ . Kun  $r \rightarrow \infty$ , on  $1/r \rightarrow 0^+$ , joten voidaan käyttää suoraan edellisen esimerkin tulosta ja päätellä, että

$$\Gamma(z, r) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k+1-z)}{\Gamma(1-z)} e^{-r} r^{z-1-k} \quad (r \rightarrow \infty),$$

jossa virheelle pätee approksimaatio

$$\left| \Gamma(z, r) - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\Gamma(k+1-z)}{\Gamma(1-z)} e^{-r} r^{z-1-k} \right| = e^{-r} r^{z-1} |R_n(1/r)| \leq (n+1-z)^{n+1} e^{-r} r^{z-2-n}.$$

Tässä saadaan siis asymptoottinen sarja skaalafunktiojonolla  $w_n(r) := e^{-r} r^{z-1-n}$ . Jos  $z$  ei ole negatiivinen kokonaisluku, voidaan yllä olevat kertoimet myös ilmaista toisin

$$(-1)^k \frac{\Gamma(k+1-z)}{\Gamma(1-z)} = (-1)^k (1-z)(2-z) \cdots (k-z) = (z-1)(z-2) \cdots (z-k) = \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z-k)}.$$

(Tämä versio asymptoottisesta kehitelmästä löytyy myös Wikipediasta [https://en.wikipedia.org/wiki/Incomplete\\_gamma\\_function](https://en.wikipedia.org/wiki/Incomplete_gamma_function)).

#### 5.4.1 Liite: Suuruusluokkanotaatiot ”O” ja ”o”

Alla on annettu käytetyimmät merkinnät ja määritelmät suuruusluokka-arvioille, sekä esimerkkejä niiden käytöstä.

” $O$ ”, ” $\mathcal{O}$ ” (engl. *big O notation*) Kun  $f(x)$  ja  $M(x)$  ovat kaksi reaalifunktiota, joilla  $f$  on funktion  $M$  ”asymptoottisesti rajoittama”, kun  $x \rightarrow \infty$ , merkitään tätä

$$f(x) = O(M(x)), \quad \text{kun } x \rightarrow \infty.$$

Tarkempi matemaattinen määritelmä merkinnälle kuuluu seuraavasti: tällöin oletetaan, että löytyy sellaiset  $x_0$  ja vakio  $C > 0$ , että

$$|f(x)| \leq C|M(x)|, \quad \text{kaikilla } x \geq x_0. \quad (5.22)$$

Muita mahdollisia merkintöjä tälle ovat esimerkiksi

$$\begin{aligned} f(x) &\in O(M(x)), & \text{kun } x \rightarrow \infty, \\ f(x) &= \mathcal{O}(M(x)), & \text{kun } x \rightarrow \infty, \\ f(x) &= O(M(x)) & (x \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Merkintää käytetään myös kompleksifunktiolle ja tapauksissa, jossa asymptotiikkaa tutkitaan jonkin muun raja-arvon kuin  $x \rightarrow \infty$  suhteen. Esimerkiksi kompleksifunktiolle  $f$

$$f(z) = O(z^3), \quad \text{kun } z \rightarrow 0,$$

tarkoittaa, että löytyy vakio  $C > 0$  ja  $\varepsilon > 0$ , joilla

$$|f(z)| \leq C|z^3| = C|z|^3, \quad \text{kun } 0 < |z| \leq \varepsilon.$$

” $o$ ” (engl. *small O notation*) Kun  $f(x)$  ja  $M(x)$  ovat kaksi reaalifunktiota, joilla  $f$  on asymptoottisesti ”selvästi pienempi” kuin  $M$ , kun  $x \rightarrow \infty$ , merkitään tätä

$$f(x) = o(M(x)), \quad \text{kun } x \rightarrow \infty.$$

Tarkempi matemaattinen määritelmä merkinnälle kuuluu seuraavasti: tällöin oletetaan, että jokaista  $\varepsilon > 0$  löytyy reaaliluku  $x_0$ , että

$$|f(x)| \leq \varepsilon|M(x)|, \quad \text{kaikilla } x \geq x_0. \quad (5.23)$$

Tärkeä erikoistapaus on tilanne, jossa  $M(x) \neq 0$  jostain arvosta  $x_1$  alkaen, eli kaikilla  $x \geq x_1$ . Tällöin voidaan määritelmässä (5.23) jakaa epäyhtälö arvolla  $|M(x)|$  ja huomataan, että se on ekvivalentti seuraavan raja-arvoehdon kanssa

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{M(x)} = 0.$$

Aivan kuten edellisessäkin tapauksessa, merkintää käytetään myös kompleksifunktiolle ja tapauksissa, jossa asymptotiikkaa tutkitaan jonkin muun raja-arvon kuin  $x \rightarrow \infty$  suhteen.

### Huomautus 5.11

- Jos  $f(x) = o(M(x))$  pätee selvästi myös  $f(x) = O(M(x))$ , mutta toisin päin eivät ominaisuudet välttämättä periydykään (esimerkiksi  $2x = O(x)$ , mutta  $2x \neq o(x)$ ).
- Merkintää käytetään usein kertomaan lyhyesti, millainen virhe jää jäljelle, jos funktiota  $f$  approksimoidaan funktiolla  $h$ : merkintä  $f(x) = h(x) + O(M(x))$  tarkoittaa, että  $f(x) - h(x) = O(M(x))$ . Esimerkiksi eksponenttifunktion Taylorin sarjasta saadaan

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3), \quad \text{kun } x \rightarrow 0.$$

- Lisää tietoa ja muita mahdollisia tapoja merkitä ja määritellä suuruusluokan käsitettä löytyy esim. Wikipediasta ([https://en.wikipedia.org/wiki/Big\\_O\\_notation](https://en.wikipedia.org/wiki/Big_O_notation)).

**Esimerkki 5.12**

- Seuraavat esimerkit näkee helposti todeksi huomaamalla, että raja-arvo  $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)/M(x)|$  on äärellinen, esimerkiksi nolla. Kun reaalityluku  $x \rightarrow \infty$ , pätee siis

$$\frac{x}{x^2 - x + 1} = O(x^{-1}), \quad e^{ix} \ln(x^2) = O(\ln x), \quad e^{-x} = o(x^{-N}), \quad \text{kaikilla } N \in \mathbb{N}.$$

- Oletetaan, että  $z_0$  on analyyttisen funktion  $f$  kertaluvun  $m$  napa. Tällöin on raja-arvo  $\lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^m f(z)]$  äärellinen, pätee siis

$$f(z) = O\left(\frac{1}{(z - z_0)^m}\right), \quad \text{kun } z \rightarrow z_0.$$

- Seuraavassa esimerkissä raja-arvoa ei suoraan löydy. Sen sijaan käytetään ensin epäyhtälöä  $|\sin y| \leq 1$ , jonka jälkeen raja-arvon otto on helppoa L'Hôpitalin säännön avulla:

$$\frac{1}{e^x - 1} \sin(x^{-1}) = O(x^{-1}), \quad \text{kun reaalityluku } x \rightarrow 0.$$

Jos yllä sallitaan, että  $x \in \mathbb{C}$ , joudutaan arviota muuttamaan, sillä esim.  $\sin((-it)^{-1}) = \sin(i/t) = i \sinh(1/t)$ , joka on eksponentiaalisesti kasvava, kun  $t \rightarrow 0$ . Käyttäen sinin eksponenttesitystä ja kolmioepäyhtälöä, saadaan kompleksiarvoillekin pätevä yläraja  $|\sin w| \leq e^{|w|}$ , joten pätee

$$\frac{1}{e^z - 1} \sin(z^{-1}) = O\left(z^{-1} e^{1/|z|}\right), \quad \text{kun kompleksiluku } z \rightarrow 0.$$

**5.4.2 Liite: Taylorin polynomi reaalfunktion approksimaationa**

Aiemmin nähtiin kuinka analyyttiset kompleksifunktiot voi aina esittää suppenevan Taylorin sarjan avulla. Palautetaan tässä mieleen, kuinka vähemmän oletuksin voidaan reaalfunktiolle rakentaa approksimaatioita **Taylorin polynomien** avulla. Lauseen todistus löytyy esimerkiksi Wikipediasta ([https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor%27s\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor%27s_theorem)).

**Lause 5.13 (Taylorin lause)** Oletetaan, että löytyy reaalityluvut  $a, b$ , joille  $a < b$  ja funktio  $f(x)$  on jatkuvasti  $n + 1$  kertaa derivoituva arvoilla  $a < x < b$ . Jos  $x_0$  kuuluu tälle avoimelle välille,  $x_0 \in ]a, b[$ , pätee approksimaatio

$$f(x) = P_n(x; x_0) + R_n(x; x_0), \quad \text{kun } a < x < b, \quad (5.24)$$

jossa  $P_n$  on funktion  $f$  **asteen  $n$  Taylorin polynomi** pisteessä  $x_0$ ,

$$P_n(x; x_0) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad (5.25)$$

ja  $R_n$  on vastaava **asteen  $n$  jäännöstermi**<sup>5</sup>

$$R_n(x; x_0) := \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n dt. \quad (5.26)$$

Jäännöstermille pätee aina  $R_n(x; x_0) = O((x - x_0)^{n+1})$ , kun  $x \rightarrow x_0$ , sillä jokaista  $x \in ]a, b[$  kohti löytyy aina jokin  $r \in [0, 1]$ , jolla

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + r(x - x_0))}{(n + 1)!} (x - x_0)^{n+1}. \quad (5.27)$$

<sup>5</sup>  $R_n$ :n määrittelevä integraali luetaan suunnattuna viivaintegraalina eli, jos  $x < x_0$ , saa se arvon  $-\int_x^{x_0} \dots dt$ .

## 5.5 Satulapisteaprossimaatio

**Satulapisteaprossimaatiota** (engl. *saddle point approximation* tai *method of steepest descent*) käytetään tutkimaan, miten integraalin avulla määritellyt funktiot

$$F(T) := \int_{\gamma} f(z)e^{Tg(z)} dz, \quad T \in \mathbb{R}, \quad (5.28)$$

käyttäytyvät kun  $T \rightarrow \infty$ . Tässä oletetaan yleensä, että  $f$  ja  $g$  ovat analyyttisiä funktioita integrointireitin ympäristössä ja usein lähdetään liikkeelle integrointireitistä  $\gamma$ , joka kulkee reaaliakselia pitkin. Menetelmän idea on muokata integrointireittiä  $\gamma$  Cauchyn lausetta käyttäen (Lause 1.41) siten, että integrointireitillä  $\operatorname{Re} g(z)$  on mahdollisimman pieni: tällöin nimittäin myös integrandin moduli tyypillisesti minimoituu, kun  $T \gg 1$ , sillä onhan

$$\left| f(z)e^{Tg(z)} \right| = |f(z)|e^{T\operatorname{Re} g(z)}.$$

Muotoa (5.28) olevia integraaleja tulee vastaan lähes aina, kun differentiaaliyhtälöitä ratkaistaan pian esiteltävän Fourier'n muunnoksen avulla. Esimerkiksi vapaan hiukkasen Schrödingerin yhtälön ratkaisu  $\psi_t(x)$  alkutilalla, jonka Fourier'n muunnos on  $\hat{\psi}_0(p)$ ,  $p \in \mathbb{R}$ , saadaan integraalista

$$\psi_t(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{i(px - t\frac{1}{2m}p^2)} \hat{\psi}_0(p).$$

Näin ollen sekä rajat  $|t| \rightarrow \infty$  että  $|x| \rightarrow \infty$  johtavat muotoa (5.28) olevan funktion asymptotiikan ratkaisemiseen.

### 5.5.1 Reaaliset satulapisteintegraalit

#### Yhden satulapisteen reaalinen tapaus

Aloitetaan erikoistapauksesta, jossa polku  $\gamma$  kulkee reaaliakselia pitkin pisteestä  $a$  pisteeseen  $b$ , ja eksponentissa oleva reaalfunktio  $g$  toteuttaa seuraavat ehdot:  $g''(x) < 0$  kaikilla  $x \in (a, b)$  ja löytyy *kriittinen piste*  $x_0 \in (a, b)$ , jossa  $g'(x_0) = 0$ . Koska  $g'' < 0$ , on derivaatta  $g'$  aidosti vähenevä koko välillä, ja pätee siis  $g'(x) > 0 > g'(y)$  aina, kun  $x < x_0 < y$ . Nähdään, että näillä oletuksilla välillä on vain yksi kriittinen piste  $x_0$  ja tämä piste on funktion  $g(x)$  globaali maksimi.

Näistä oletuksista seuraa seuraava tulos, jonka yleinen muoto tunnetaan *Morsen lemmän* ([https://en.wikipedia.org/wiki/Morse\\_theory](https://en.wikipedia.org/wiki/Morse_theory)):

**Lause 5.14** *Olkoon  $g$  on kahdesti jatkuvasti derivoituva funktio välillä  $(a, b)$ , jolle  $g''(x) < 0$  kaikilla  $x$ , ja löytyy  $x_0 \in (a, b)$ , jossa  $g'(x_0) = 0$ . Tällöin löytyy samalla välillä määritelty jatkuvasti derivoituva reaalfunktio  $h$ , jolla  $h(x_0) = 0$ ,  $h'(x_0) = 1$ ,  $h'(x) > 0$  kaikilla  $x$ , ja*

$$g(x) = g(x_0) + \frac{1}{2}g''(x_0)h(x)^2, \quad a < x < b. \quad (5.29)$$

**TODISTUS** Merkitään yksikertaisuuden vuoksi kaavan (5.29) vakioita  $g_0 := g(x_0)$  ja  $b_0 := g''(x_0) < 0$ . Sovelletaan Taylorin lausetta asteella  $n = 1$  pisteessä  $x = x_0$ . Koska  $g'(x_0) = 0$ , häviää ensimmäisen asteen termi, ja saadaan siis

$$g(x) = P_1(x; x_0) + R_1(x; x_0) = g_0 + \int_{x_0}^x g''(t)(x-t) dt.$$

Jälkimmäisen integraalin polku voidaan parametrisoida uudelleen  $t = r(x - x_0) + x_0$ ,  $r \in [0, 1]$ , josta saadaan

$$g(x) = g_0 + \frac{b_0}{2}(x - x_0)^2 \int_0^1 \frac{2}{b_0} g''(r(x - x_0) + x_0)(1-r) dr.$$

Koska tässä olevassa integraalissa on aina  $b_0^{-1}g'' > 0$ , on myös

$$I(x) := \int_0^1 \frac{2}{b_0} g''(r(x-x_0) + x_0)(1-r) dr > 0,$$

joten voidaan määritellä reaalinen funktio

$$h(x) := (x - x_0)\sqrt{I(x)},$$

jolle kaava (5.29) pätee. Selvästi  $h(x_0) = 0$  ja  $I$  on jatkuva funktio, jolle  $I(x_0) = 1$ . Näin ollen

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \sqrt{I(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \sqrt{I(x_0)} = 1,$$

joten  $h$  on derivoituva pisteessä  $x_0$  ja sille pätee  $h'(x_0) = 1$ . Kun  $x \neq x_0$ , on  $h(x)/(x - x_0) = \sqrt{I(x)} > 0$ , joten  $h(x) > 0$ , kun  $x > x_0$ , ja  $h(x) < 0$ , kun  $x < x_0$ . Näin ollen voidaan kaavasta (5.29) ratkaista

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{2(g(x) - g_0)/b_0}, & \text{kun } x > x_0, \\ -\sqrt{2(g(x) - g_0)/b_0}, & \text{kun } x < x_0. \end{cases}$$

Tästä seuraa ketjusäännön perusteella, että  $h$  on jatkuvasti derivoituva sekä kun  $x < x_0$  että kun  $x > x_0$ . Molemmissa alueissa saadaan yhtälöä (5.29) derivoimalla

$$g'(x) = b_0 h(x) h'(x) \quad \Rightarrow \quad h'(x) = \frac{g'(x)}{b_0 h(x)} = \frac{g'(x)}{b_0(x - x_0)} \frac{1}{\sqrt{I(x)}}.$$

Tässä

$$g'(x) = g'(x) - g'(x_0) = \int_0^1 g''(r(x-x_0) + x_0) dx = (x - x_0) \int_0^1 g''(r(x-x_0) + x_0) dr,$$

joten  $g'(x)/(x - x_0) < 0$  oletusten mukaan, ja nähdään siis myös, että  $h'(x) > 0$ . Ottamalla raja  $x \rightarrow x_0$  saadaan  $h'(x) \rightarrow g''(x_0)/(b_0\sqrt{I(x_0)}) = 1 = h'(x_0)$ , joten  $h$  on jatkuvasti derivoituva funktio, jolle  $h'(x) > 0$  kaikilla  $x \in (a, b)$ .  $\square$

Morsen lemmän tuottamasta funktiosta  $h(x)$  on hyötyä, sillä nyt voidaan tehdä muuttujanvaihto  $t = h(x)$  alkuperäiseen integraaliin

$$F(T) := \int_a^b f(x) e^{Tg(x)} dx, \quad T > 0,$$

koska  $h'(x) > 0$  koko integrointivälillä. Koska  $h$  on tällöin aidosti kasvava, pätee tällöin  $h(a) < h(x_0) = 0 < h(b)$ , sillä  $a < x_0 < b$ . Uudeksi integrointiväliksi saadaan siis  $[-\alpha, \beta]$ , määrittelemällä  $\alpha := -h(a)$ ,  $\beta := h(b)$ , jotka ovat molemmat positiivisia. Lisäksi  $h$ :lla on olemassa käänteisfunktio  $h^{-1}$ , jolle pätee  $h^{-1}(0) = x_0$  ja funktion  $x(t) = h^{-1}(t)$  derivaatta on  $1/h'(h^{-1}(t))$ . Merkitään nyt kaavan (5.29) vakioita  $g_0 := g(x_0)$  ja  $c_0 := -g''(x_0) > 0$ , jolloin pätee siis  $g(x) = g_0 - \frac{c_0}{2}h(x)^2 = g_0 - \frac{c_0}{2}t^2$ . Näin ollen muuttujanvaihto tuottaa integraalin

$$F(T) = \int_{-\alpha}^{\beta} f(h^{-1}(t)) e^{Tg_0 - \frac{1}{2}c_0 T t^2} \frac{1}{h'(h^{-1}(t))} dt.$$

Rajalla  $T \rightarrow \infty$  eksponenttitermi pyrkii pitämään  $t$ :n arvot mahdollisimman lähellä nollaa, joten tehdään vielä uusi muuttujanvaihto  $u = t\sqrt{c_0 T}$ , josta saadaan

$$F(T) = \int_{-\alpha\sqrt{c_0 T}}^{\beta\sqrt{c_0 T}} G(u(c_0 T)^{-\frac{1}{2}}) e^{Tg_0 - \frac{1}{2}u^2} \frac{1}{\sqrt{c_0 T}} du, \quad G(t) := \frac{f(h^{-1}(t))}{h'(h^{-1}(t))}.$$

Tämän jälkeen voidaan melko vähäisin oletuksin<sup>6</sup> funktiosta  $f(x)/h'(x)$  ottaa tässä raja-arvo  $T \rightarrow \infty$  integrandissa seuraavasti

$$e^{-g_0 T} (c_0 T)^{\frac{1}{2}} F(T) = \int_{-\alpha\sqrt{c_0 T}}^{\beta\sqrt{c_0 T}} G(u(c_0 T)^{-\frac{1}{2}}) e^{-\frac{1}{2}u^2} du \xrightarrow{T \rightarrow \infty} G(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du.$$

Jäljelle jäävä integraali voidaan laskea  $\Gamma$ -funktion avulla, sillä sen integrandi on parillinen ja muuttujanvaihdolla  $v = \frac{1}{2}u^2$  siitä saadaan

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = 2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = 2 \int_0^{\infty} e^{-v} \frac{1}{\sqrt{2v}} dv = \sqrt{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2\pi}.$$

(Parillisten ja parittomien funktioiden yli integrointia on kerrattu Luvussa 5.5.2.) Toisaalta  $G(0) = f(h^{-1}(0))/h'(h^{-1}(0)) = f(x_0)/h'(x_0) = f(x_0)$ , joten funktion  $F$  johtavaksi asymptootiseksi käytökseksi saadaan

$$F(T) \approx f(x_0) e^{g(x_0)T} \sqrt{\frac{2\pi}{-g''(x_0)T}} \quad (T \rightarrow \infty).$$

Tätä kutsutaan **satulapisteaprosimaation johtavaksi termiksi**.

*Huomataan, että johtavan asymptootisen käytöksen laskemiseksi ei tarvitse edes ratkaista kuvausta  $h$ .* Tämä onkin yksi syy, miksi yleensä lopetetaankin approksimaation laskeminen tähän. Jos funktiot  $f$  ja  $h$  ovat mielivaltaisen monta kertaa derivoituvia, niin voidaan satulapisteaprosimaatiota tarkentaa täydeksi (asymptootiseksi) sarjakehitelmäksi käyttäen funktion  $G(t) = f(h^{-1}(t))/h'(h^{-1}(t))$  Taylorin polynomiaprosimaatioita. Tällöin voidaan nimittäin integrandiin sijoittaa kaava

$$G(t) = \sum_{k=0}^n \frac{G^{(k)}(0)}{k!} t^k + R_n(t; 0),$$

josta saadaan toistamalla yllä olevat laskut kullakin  $n$  lopputulokseksi

$$F(T) \sim \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ parillinen}}}^{\infty} \frac{G^{(k)}(0)}{k!} 2^{\frac{k+1}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) e^{g(x_0)T} (c_0 T)^{-\frac{k+1}{2}} \quad (T \rightarrow \infty),$$

sillä kaikille parittomille  $k$  on  $\int_{-\infty}^{\infty} u^k e^{-\frac{1}{2}u^2} du = 0$ , koska integrandi on tällöin pariton funktio muuttujassa  $u$ , ja parillisille  $k$  pätee

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^k e^{-\frac{1}{2}u^2} du = 2 \int_0^{\infty} u^k e^{-\frac{1}{2}u^2} du = 2 \int_0^{\infty} (2v)^{\frac{k}{2}} e^{-v} \frac{1}{\sqrt{2v}} dv = 2^{\frac{k+1}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right).$$

Käyttämällä  $\Gamma$ -funktion tunnettuja arvoja puoliluvuilla, saadaan tästä vielä hieman siistimpi esitys kaksoiskertomaa  $((2n)!! = (2n)(2n-2)\cdots 2)$  käyttäen

$$F(T) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G^{(2n)}(0)}{(2n)!!} (-g''(x_0)T)^{-n} e^{g(x_0)T} \sqrt{\frac{2\pi}{-g''(x_0)T}} \quad (T \rightarrow \infty).$$

**Esimerkki 5.15 (Stirlingin kaava)** Laske asymptoottinen approksimaatio kertomalle  $n!$ , kun  $n \rightarrow \infty$ .

<sup>6</sup>(MAT) Esimerkiksi riittää, että löytyy vakio  $C > 0$ , jolla  $|f(x)/h'(x)| \leq C$  kaikilla  $x \in (a, b)$ . Tällöin voidaan raja-arvo ottaa suoraan integrandista soveltaen dominoidun konvergenssin lausetta funktioon  $\mathbb{1}_{\{-\alpha\sqrt{c_0 T} < u < \beta\sqrt{c_0 T}\}} G(u(c_0 T)^{-\frac{1}{2}}) e^{-\frac{1}{2}u^2}$ , käyttäen majoranttia  $C e^{-\frac{1}{2}u^2}$ .

*Ratkaisu:* Koska  $n! = \Gamma(n+1)$ , voidaan tämä johtaa tutkimalla funktion arvoja, kun  $z \rightarrow \infty$  reaaliakselia pitkin. Voidaan käyttää integraalimääritelmää, jonka mukaan

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t+n \ln t} dt.$$

Muutetaan tämä ensin satulapistemuotoon tekemällä muuttujanvaihto  $t = nx$ , jolloin  $\ln t = \ln n + \ln x$ , ja saadaan siis

$$\Gamma(n+1) = n e^{n \ln n} \int_0^{\infty} e^{n(-x+\ln x)} dx.$$

Jäljellä oleva integraali on tässä luvussa tarkasteltua muotoa, kun määritellään  $f(x) = 1$  ja  $g(x) = \ln x - x$ . Tällöin

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 \quad \text{ja} \quad g''(x) = -\frac{1}{x^2},$$

joten  $g''(x) < 0$  kaikilla  $x > 0$ , ja  $g'(x) = 0$  täsmälleen silloin, kun  $x = 1$ . Näin ollen voidaan suoraan soveltaa yllä johdettuja kaavoja, ja sijoittamalla  $x_0 = 1$ ,  $g(1) = -1$ ,  $g''(1) = -1$ , saadaan johtavaksi approksimaatioksi

$$n! \approx n e^{n \ln n} e^{-n} n^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}. \quad (5.30)$$

Tätä tulosta kutsutaan **Stirlingin kaavaksi**. Asymptoottisen kehitelmän seuraavasta termistä saadaan arvio virheellekin:

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} (1 + O(n^{-1})).$$

### Useamman satulapisteen reaalinen tapaus

Tarkastellaan vielä lisää tapausta, jossa polku  $\gamma$  kulkee reaaliakselia pitkin pisteestä  $a$  pisteeseen  $b$ , ja eksponentissa oleva  $g$  on reaalinen ja kahdesti jatkuvasti derivoituva. Tähän tapaukseen voidaan soveltaa edellistä satulapisteapproksimaatiota sopivasti valittuihin integrointiväleihin.

1. Etsitään funktion  $g$  *aidot lokaalit maksimit* eli pisteet  $x_i$ , joissa  $g'(x_i) = 0$  ja  $g''(x_i) < 0$ .
2. Koska  $g''$  on jatkuva, löytyy jokaista pistettä  $x_i$  kohti jokin väli  $(a_i, b_i)$ , jossa  $g'' < 0$ .
3. Tällöin voidaan siis soveltaa satulapisteapproksimaatiota jokaiselle välille erikseen ja saadaan

$$F(T) \approx \sum_i f(x_i) e^{g(x_i)T} \sqrt{\frac{2\pi}{-g''(x_i)T}} \quad (T \rightarrow \infty).$$

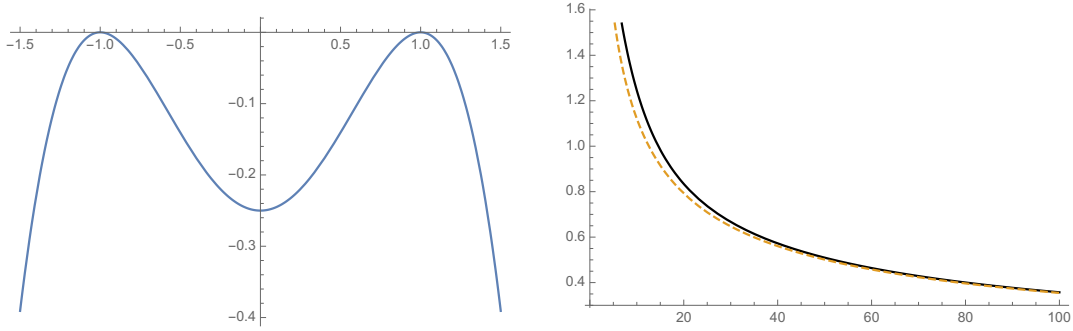
Näin tehdyssä approksimaatiossa olisi hyvä lisäksi saada jokin estimaatti myös välien  $(a_i, b_i)$  ulkopuolelle jäävälle integraalin osalle. Koska näillä väleillä ei ole aitoja lokaaleja maksimeita, tuottavat ne tyypillisesti eksponentiaalisesti pienemmän kontribuution integraaliin verrattuna globaalin maksimin tuottamaan osuuteen, mutta asia olisi aina hyvä tarkistaa erikseen.

**Esimerkki 5.16** Satulapisteapproksimaatio ”kaksoishuippupotentiaalille” eli funktiolle

$$F(T) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{Tg(x)} dx, \quad T > 0, \quad \text{kun } g(x) := -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}.$$

*Ratkaisu:* Nyt  $g'(x) = -x^3 + x$  ja  $g''(x) = -3x^2 + 1$ . Näin ollen  $g$ :llä on kaksi lokaalia maksimia pisteissä  $x_{\pm} := \pm 1$  ja lokaali minimi pisteessä  $x = 0$ , ks. Kuva 5.2. Koska  $g(\pm 1) = 0$  ja  $g''(\pm 1) = -2$ , saadaan satulapisteapproksimaatio

$$F(T) \approx \sum_{\sigma=\pm 1} e^{g(\sigma)T} \sqrt{\frac{2\pi}{-g''(\sigma)T}} = 2\sqrt{\frac{2\pi}{2T}} = \sqrt{\frac{4\pi}{T}}.$$



Kuva 5.2: (Vasen kuva) Esimerkin 5.16 eksponentin  $g(x)$  kuvaaja. (Oikea kuva) Esimerkin 5.16 integraalin  $F(t)$  ja sen satulapisteapproksimaation (katkoviiva) kuvaajat.

Sen ulkopuolelle jää integraali yli arvojen, joille  $g''(x) \geq 0$ , eli arvojen  $|x| \leq 1/\sqrt{3}$ . Tällä välillä saa  $g$  maksiminsa välin laidoilla, eli  $g(x) \leq g(1/\sqrt{3}) = -\frac{1}{9}$ , joten tästä tuleva kontribuutio on suuruudeltaan

$$\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} e^{Tg(x)} dx \leq \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-T\frac{1}{9}}.$$

Koska tämä termi on  $o(T^{-n})$  kaikilla  $n$ , on tämä termi pienempi kuin mikään satulapisteiden ympäristöjen asymptoottisen kehittämän termi. Kuvassa 5.2 on piirretty funktion  $F(T)$  ja sen satulapisteapproksimaation  $\sqrt{4\pi/T}$  kuvaajat.

#### (Lisä) Yleistetty reaalinen tapaus

Joskus törmää tilanteeseen, jossa satulapisteet ovat degeneroituja, eli  $g''(x_0) = 0$ . Tällöin on mahdollista kuitenkin yleistää yllä olevaa muuttujanvaihdon ideaa, jos eksponentissa oleva reaali-funktio  $g$  saadaan muotoon  $g(x) = g_0 - |h(x)|^{2p}$ , joillakin  $p > 0$ ,  $g_0 \in \mathbb{R}$  ja funktiolla  $h$ , jolle  $h'(x) > 0$ , kun  $a < x < b$ , ja  $h(a) < 0 < h(b)$ . (Näin käy esimerkiksi polynomille  $g(x) = g_0 - x^4$ , jolloin  $x^4 = |x|^4$  ja voidaan valita  $h(x) = x$  ja  $p = 2$ .) Tällöin voidaan integraaliin

$$F(T) := \int_a^b f(x) e^{Tg(x)} dx, \quad T > 0,$$

tehdä muuttujanvaihto  $u = h(x)T^q$ ,  $q := \frac{1}{2p} > 0$ , jossa  $x = h^{-1}(T^{-q}u)$ . Kun merkitään  $\alpha := -h(a) > 0$ ,  $\beta := h(b) > 0$ , saadaan siis

$$F(T) = \int_{-\alpha T^q}^{\beta T^q} G(T^{-q}u) e^{Tg_0 - |u|^{2p}} du, \quad G(t) := \frac{f(h^{-1}(t))}{h'(h^{-1}(t))}.$$

Koska  $h$  on aidosti kasvava ja jatkuva funktio, joka alkaa negatiivisesta arvosta ja päättyy positiiviseen arvoon, löytyy sille tasan yksi nollakohta  $x_0 \in (a, b)$ , ja siten  $h^{-1}(0) = x_0$ . Kun  $T \rightarrow \infty$ , on  $T^{-q}t \rightarrow 0$  ja siten myös  $h^{-1}(T^{-q}t) \rightarrow x_0$  kaikilla  $t$ . Tämän jälkeen voidaan tyypillisesti ottaa tässä raja-arvo  $T \rightarrow \infty$  suoraan integrandissa seuraavasti

$$e^{-g_0 T} T^q F(T) = \int_{-\alpha T^q}^{\beta T^q} G(T^{-q}u) e^{-|u|^{2p}} du \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{f(x_0)}{h'(x_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|u|^{2p}} dt.$$

Tässä oleva integraali voidaan laskea  $\Gamma$ -funktion avulla, sillä sen integrandi on parillinen ja muuttujanvaihdolla  $u = t^{2p}$  siitä saadaan

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|^{2p}} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^{2p}} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-u} \frac{u^{-1+1/(2p)}}{2p} du = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2p}\right)}{p}.$$



Tästä saadaan funktion  $F$  johtavaksi asymptoottiseksi käytökseksi

$$F(T) \approx \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2p}\right)}{p} \frac{f(x_0)}{h'(x_0)} e^{g_0 T} T^{-\frac{1}{2p}} \quad (T \rightarrow \infty).$$

Tulosta voi myös tarvittaessa tarkentaa täydeksi (asymptoottiseksi) sarjakehitelmäksi käyttäen funktion  $G$  Taylorin polynomiaprossimaatiota. Tällöin voidaan nimittäin integrandiin sijoittaa

$$G(t) = \sum_{k=0}^n \frac{G^{(k)}(0)}{k!} t^k + R_n(t; 0),$$

josta saadaan toistamalla yllä olevat laskut kullakin  $k$  lopputulokseksi

$$F(T) \sim \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ parillinen}}}^{\infty} \frac{G^{(k)}(0)}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2p}\right)}{p} e^{g_0 T} T^{-\frac{k+1}{2p}} \quad (T \rightarrow \infty),$$

sillä tässäkin parittomille  $k$  on  $\int_{-\infty}^{\infty} u^k e^{-|u|^{2p}} du = 0$ .

Lisää yleistyksiä löytyy esimerkiksi lähteestä [7, Luku 7.7].

### 5.5.2 Liite: Parillisten ja parittomien funktioiden yli integrointi

**Määritelmä 5.17** *Funktio  $f(x)$  on **parillinen**, jos  $f(-x) = f(x)$ , ja **pariton**, jos  $f(-x) = -f(x)$ .*

Aina, kun  $R > 0$ , pätee

- Jos  $f$  on *parillinen*,

$$\int_{-R}^R f(x) dx = 2 \int_0^R f(x) dx, \quad \text{ja} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{\infty} f(x) dx.$$

- Jos  $f$  on *pariton*,

$$\int_{-R}^R f(x) dx = 0, \quad \text{ja} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 0.$$

Nämä kaikki tulokset seuraavat suoraan alla olevasta muuttujanvaihdesta, joka pätee ilman mitään oletuksia funktion  $f$  parillisuudesta:

$$\int_{-R}^R f(x) dx = \int_{-R}^0 f(x) dx + \int_0^R f(x) dx = \int_0^R f(-y) dy + \int_0^R f(x) dx = \int_0^R (f(x) + f(-x)) dx.$$



# Kirjallisuutta

- [1] Juha Honkonen. *Fysiikan matemaattiset menetelmät I*. Limes ry, 2005. 2. painos.
- [2] George B. Arfken and Hans J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier Academic, 6th edition, 2005.
- [3] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 3rd edition, 1987.
- [4] Walter Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, New Delhi, 2nd edition, 1991.
- [5] Jussi Väisälä. *Topologia I*. Limes ry, 2007. 4. painos.
- [6] Jussi Väisälä. *Topologia II*. Limes ry, 2004. 2. painos.
- [7] Lars Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I: Distribution Theory and Fourier Analysis*. Springer, Berlin, 1990.