Luku 5

Eulerin funktiot ja asymptoottiset sarjat

5.1 Analyyttinen jatkaminen

Luvussa 3.1 nähtiin, että jos kaksi analyyttistä funktiota ovat samoja jossain sopivassa joukossa, esimerkiksi jollain kompleksitason janalla, täytyy näiden kahden funktion olla samoja kaikkialla määrittelyalueessaan. Tätä ideaa käytetään muodostamaan **analyyttisiä jatkeita** funktioille, jotka on määritelty vain jossain kompleksitason epätyhjässä osajoukossa U, esimerkiksi jossain avoimessa kiekossa. Nähdään nimittäin, että *analyyttiset jatkeet annettuun alueeseen ovat yksikäsitteisiä*: Olkoon Ω on jokin alue, $U \subset \Omega$ ja oletetaan, että $F, G \in H(\Omega)$ ovat funktion $f \in H(U)$ jatkeita. Tällöin oletusten mukaan $F(z) = f(z) = G(z)$ kaikilla $z \in U$. Koska joukko U on avoin ja epätyhjä, sisältää se jonkin avoimen kiekon, ja toisaalta $U \subset \Omega$, joka on yhtenäinen, joten täytyy olla $F = G$ koko joukossa Ω.

Fysiikassa yhtälöitä ratkaistaan usein sarjakehitelmien avulla, esimerkiksi potenssisarjoina. Nämä sarjat eivät kuitenkaan tyypillisesti suppene kaikkialla kompleksitasossa tai reaaliakselilla. Mitä tehdä, jos pitäisi kuitenkin tietää ratkaisufunktion arvo tuon sarjan suppenemisalueen ulkopuolella? Usein vastaus löytyy juuri analyyttisen jatkeen avulla, jonka voi periaatteessa aina tehdä Taylorin sarjojen kautta, niin kuin alla olevassa esimerkissä selitetään.

Esimerkki 5.1 Oletetaan, että f_0 on määritelty potenssisarjana $f_0(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, jonka suppenemissäde on $R_0 > 0$, eli avoimessa kiekossa $D_0 := B_{R_0}(z_0)$ eli arvoille $|z - z_0| < R_0$. Jos $z_1 \in D_0$, on funktio f_0 siis analyyttinen tämän pisteen ympäristössä, joten sille löytyy Taylorin sarja; merkitään tämän Taylorin sarjan suppenemissädettä $R_1 > 0$ ja sarjan avoimessa kiekossa $D_1 := B_{R_1}(z_1)$ määrittelemää funktiota f_1. Lauseen 2.40 mukaan täytyy olla $f_1(z) = f_0(z)$ kaikilla $z \in B_\varepsilon(z_1)$, kunhan $\varepsilon > 0$ on niin pieni, että $B_\varepsilon(z_1) \subset D_0 \cap D_1$ (esimerkiksi $\varepsilon := R_0 - |z_1 - z_0| > 0$ käy tähän, minkä näkee kolmioepäyhtälön avulla). Voidaan siis määritellä funktion f_1 laajennus F yhdisteeseen $D_0 \cup D_1$ asettamalla $F(z) = f_1(z)$, kun $z \in D_0$, ja $F(z) = f_2(z)$, kun $z \in D_1 \backslash D_0$ ja tämä funktio on analyyttinen, sillä sekä f_1 että f_2 ovat analyyttisiä. Jos $R_1 > R_0 - |z_1 - z_0|$ on uusi joukko suurempi kuin alkuperäinen, jolloin saadaan aito analyyttinen jatke funktiolle f_0.

Esimerkki 5.2 Konkreettinen versio edellisestä esimerkistä: Määritellään

$$f_0(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n , \qquad \text{kun } |z| < 2 .$$

Tämä on geometrinen sarja, joka suppenee kaikilla $|z/2| < 1$ eli kun $|z| < 2$. Näissä pisteissä sarjan arvoksi saadaan

$$f_0(z) = \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = \frac{2}{2 - z} .$$

Määrittelyalue sisältää pisteen $z_1 = -1$ ja, kun merkitään $w = z - z_1 = z + 1$, saadaan laskettua pisteen z_1 ympärillä kehitetty Taylorin sarja taas geometrisen sarjan avulla:

$$f_0(z) = \frac{2}{2-z} = \frac{2}{3-w} = \frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{w}{3}} = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{3^{n+1}}(z+1)^n .$$

Määritellään f_1 saadun sarjan avulla koko sen suppenemissäteen sisällä eli, kun $|w| < 3$,

$$f_1(z) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{3^{n+1}}(z+1)^n , \qquad \text{kun } |z+1| < 3 .$$

Tässä erikoistapauksessa käykin niin, että f_1 antaa suoraan funktion f_0 analyyttisen jatkeen, sillä kolmioepäyhtälön perusteella, jos $|z| < 2$, on myös $|z+1| \leqslant |z| + 1 < 3$. (Valitsemalla kehityspisteeksi $z_2 = \mathrm{i}$ olisi saatu Taylorin sarja, joka suppenee kun $|z - \mathrm{i}| < \sqrt{5}$, eikä kumpikaan suppenemisalue ole tällöin toisen osajoukko.)

Yllä olevaa tulosta iteroimalla saadaan aikaan *kiekkoketjua pitkin tapahtuva analyyttinen jatke*: Olkoon f_0 analyyttinen funktio avoimessa kiekossa $D_0 = B_{R_0}(z_0)$ ja $(D_0, D_1, \ldots, D_n)$ muodostaa äärellisen jonon avoimia kiekkoja, joista kaksi peräkkäistä aina leikkaavat toisiaan (eli $D_{i-1} \cap D_i \neq \varnothing$ kun $i = 1, 2, \ldots, n$). Jos tällöin voidaan aina jatkaa analyyttinen $f_i \in H(D_i)$ analyyttisesti funktioksi määrittelemällä $f_{i+1} \in H(D_{i+1})$ funktion f_i kiekon D_{i+1} keskipisteessä kehitetyn Taylorin sarjan avulla, sanotaan, että jono $(f_i)_{i=1}^n$ on kiekkoketjua $(D_0, D_1, \ldots, D_n)$ pitkin tehty funktion f_0 analyyttinen jatke. Erityisesti tällöin sanotaan, että *funktiolle f_0 löytyy kiekkoketjua $(D_0, D_1, \ldots, D_n)$ pitkin tehty analyyttinen jatke.*

Jos $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ on jokin polku kompleksitasossa, joka alkaa kiekon keskipisteestä z_0, voidaan vastaavalla tavalla tehdä f_0:n **analyyttinen jatke polkua γ pitkin**. Oletetaan tätä varten, että löytyy parametrivälin äärellinen jako $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, jossa $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n = \beta$, ja tähän jakoon liittyvä ketju avoimia kiekkoja $(D_0, D_1, D_2, \ldots, D_n)$, joilla polun pätkä parametreilla $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ sisältyy aina kiekkoon D_i (eli $\gamma(t) \in D_i$ aina kun $\alpha_{i-1} \leqslant t \leqslant \alpha_i$ ja $1 \leqslant i \leqslant n$). Jos löytyy jokin tällainen jako ja ketju $(D_0, D_1, \ldots, D_n)$ siihen liittyviä kiekkoja, joita pitkin funktiolla f_0 on analyyttinen jatke, sanotaan että *funktio f_0 voidaan jatkaa analyyttisesti polkua γ pitkin*. Mikä tahansa näin saatu funktio f_n, joka on siis analyyttinen päätepisteen $\gamma(\beta)$ sisältävässä kiekossa D_n, on *funktion f_0 analyyttinen jatke polun alkupisteen ympäristöstä sen päätepisteen ympäristöön.*

Polkua pitkin tehdyllä analyyttisellä jatkeella on seuraavat ominaisuudet:

1. Jos polulle γ löytyy jokin alkupisteestä päätepisteeseen tehty analyyttinen jatke, on tämä jatke yksikäsitteinen päätepisteen ympäristössä [3, Lause 16.11].

2. Vaikka polku γ olisi suljettu, *ei* saadun jatkeen f_n tarvitse olla sama kuin lähtöfunktio f_0 (erityisesti siis voi olla $f_n(z_0) \neq f_0(z_0)$; näin käy esimerkiksi, kun logaritmista tehdään analyyttinen jatke suljettua polkua pitkin, kun polun kiertoluku origon ympäri ei ole nolla).

3. Jos $D_0 \subset \Omega$ ja Ω on sellainen *yhdesti yhtenäinen alue*, että funktiolla $f_0 \in H(D_0)$ on analyyttinen jatke jokaista alueessa Ω kulkevaa kiekon D_0 keskipisteestä lähtevää polkua pitkin, löytyy funktiolle f_0 yksikäsitteinen analyyttinen jatke koko joukkoon Ω, eli löytyy $g \in D(\Omega)$, jolla $g(z) = f_0(z)$ kaikilla $z \in D_0$ [3, Lause 16.15].

Huomautus 5.3

- Yllä annettua suoraa Taylorin sarjoihin perustuvaa jatkamista on kuitenkin vaikea tehdä käytännössä, sillä sitä varten pitäisi olla käytössä helppo algoritmi rakentaa nopeasti uusia Taylorin sarjoja ja laskea niiden suppenemissäteitä. Yleensä jatke löydetäänkin jotain toista kautta, esimerkiksi esittämällä sarja parametrin yli otetun integraalin avulla: tästä esimerkkejä tulevissa luvuissa.

- Sopivia polkuja valitsemalla saa niitä pitkin tehdyistä analyyttisistä jatkeista aikaiseksi jonkin alkuperäisen funktion *maksimaalisen analyyttisen jatkeen*, eli analyyttiseen funktion, jonka määrittelyaluetta ei voi enää laajentaa menettämättä analyyttisyyttä. Esimerkin 5.2 kaltaisessa tapauksessa on helppoa löytää funktiolle f_0 maksimaalinen analyyttinen jatke, sillä sen muodostaa rationaalifunktio $f(z) := 2/(2-z)$, joka on määritelty koko kompleksitasossa pistettä $z = 2$ lukuun ottamatta. Maksimaalinen analyyttinen jatke voi löytyä joskus kuitenkin paljon pienemmästä joukosta: esimerkiksi [3, Lause 16.6] antaa esimerkkejä Taylorin sarjoista, joita ei voi lainkaan jatkaa äärellisen suppenemissäteensä ulkopuolelle.

5.1.1 (Lisä) Analyyttisyyden säilyminen parametrin yli integroitaessa

Lähdetään liikkeelle tilanteesta, jossa on annettu perhe $f(t,z)$ muuttujan z suhteen analyyttisiä funktioita, jotka riippuvat parametreista t. Tehdään näistä uusi muuttujan z funktio $F(z)$ integroimalla parametrien yli, eli määritellään

$$F(z) := \int f(t,z)\mathrm{d}t\,. \tag{5.1}$$

Milloin funktio F on myös analyyttinen? Osoittautuu, että **analyyttisyys periytyy parametrin yli integroitaessa aina, jos funktiolle löytyy integroituva majorantti**, samaan tapaan kuin Weierstrassin M-testissä luvussa 2.2.1.

Tarkemmat oletukset löytyvät seuraavasta lauseesta.

Lause 5.4 *Olkoon Ω kompleksitason avoin joukko, E jokin parametrien joukko (esimerkiksi avoin väli) ja $f(t,z)$, $t \in E$, $z \in \Omega$, funktioita, jotka ovat derivoituvia jokaisessa pisteessä z, kun parametri t pidetään kiinnitettynä.*[1]

Oletetaan, että jokaista suljettua kiekkoa $D \subset \Omega$ kohti löytyy jokin dominoiva funktio $M(t)$, jolle pätee

$$|f(t,z)| \leqslant M(t)\,, \ \text{kun } z \in D\,, \quad \text{ja} \quad \int_E M(t)\mathrm{d}t < \infty\,.$$

Tällöin kaavan (5.1) integraali suppenee itseisesti kaikissa pisteissä $z \in \Omega$ ja määrittelee koko joukossa Ω analyyttisen funktion F. Lisäksi funktion m:n kertaluvun derivaatalle pätee

$$F^{(m)}(z) = \int_E \partial_z^m f(t,z)\mathrm{d}t\,, \qquad z \in \Omega\,. \tag{5.2}$$

TODISTUS (Lähes identtinen Lauseen 2.33 kanssa.) Oletetaan, että $z_0 \in \Omega$. Koska Ω on avoin, löytyy jokin $\varepsilon > 0$, jolla avoin kiekko $B_{3\varepsilon}(z_0) \subset \Omega$ ja tällöin myös $D := \overline{B}_{2\varepsilon}(z_0) \subset \Omega$ ja $U := B_\varepsilon(z_0) \subset D \subset \Omega$. Oletusten mukaan löytyy siis kiekossa D määritelty funktio $M(t)$, jolle $|f(t,z)| \leqslant M(t)$ ja $\int M(t)\mathrm{d}t < \infty$. Näin ollen $|F(z)| \leqslant \int |f(t,z)|\mathrm{d}t \leqslant \int M(t)\mathrm{d}t < \infty$, kun $z \in D$, ja F on hyvin määritelty koko kiekossa D. Se on lisäksi myös jatkuva koko joukossa U, sillä funktiota M voidaan käyttää majoranttina Lebesguen dominoidun konvergenssin lauseessa, joka sallii raja-arvon ja integroinnin järjestyksen vaihdon: kun $z \in U$, pätee siis

$$\lim_{w\to z} F(w) = \int_E \lim_{w\to z} f(t,w)\mathrm{d}t = \int_E f(t,z)\mathrm{d}t = F(z)\,,$$

sillä oletusten mukaan funktio $w \mapsto f(t,w)$ on analyyttinen funktio koko joukossa Ω kiinteällä t, joten se on erityisesti jatkuva joukossa $U \subset \Omega$.

Olkoon γ mielivaltainen alueeseen U sisältyvän kolmion reunaa kiertävä polku, niin kuin Moreran lausetta (Lause 1.53) varten vaaditaan. Koska polun pituus on

[1](MAT) Tässä riittää olettaa, että E on jokin mitallinen joukko ja funktiot $f : E \times \Omega \to \mathbb{C}$ ovat mitallisia tuloavaruudessa $E \times \Omega$. Lebesguen mitan "dt" määritelmässä (5.1) voi myös korvata millä tahansa σ-äärellisellä positiivisella mitalla, jonka jälkeen yleistä Fubinin lausetta [3, Lause 8.8] voi käyttää todistuksessa.

äärellinen ja f:llä on integroituva majorantti, pätee $\int_\gamma \left(\int |f(t,z)|\mathrm{d}t\right) |\mathrm{d}z| < \infty$. Tässä voidaan siis käyttää Fubinin lausetta ja vaihtaa integrointijärjestystä. Cauchyn lausetta soveltamalla saadaan

$$\oint_\gamma F(z)\mathrm{d}z = \int_E \left(\oint_\gamma f(t,z)\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}t = 0\,,$$

sillä $z \mapsto f(t,z)$ on analyyttinen yhdesti yhtenäisessä alueessa U, jossa polku γ kulkee. Voidaan siis soveltaa Moreran lausetta ja päätellä, että F on analyyttinen kiekossa U.

Erityisesti F on siis derivoituva pisteessä z_0. Sovelletaan Cauchyn integraalikaavaa derivaatoille polulla $\gamma_0(t) := z_0 + \frac{\varepsilon}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$, joka kiertää kerran pisteen z_0 ympäri kiekossa U. Saadaan kaikille $m \geqslant 1$

$$F^{(m)}(z_0) = \frac{m!}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\gamma_0} \frac{F(z)}{(z-z_0)^{m+1}}\mathrm{d}z = \int_E \left(\frac{m!}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\gamma_0} \frac{f(t,z)}{(z-z_0)^{m+1}}\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}t\,,$$

sillä integrandissa $\left|\frac{f(t,z)}{(z-z_0)^{m+1}}\right| \leqslant M(t)(2/\varepsilon)^{m+1}$, joten voidaan jälleen vaihtaa integrointijärjestystä Fubinin lauseen perusteella. Tähän voidaan soveltaa Cauchyn integraalikaavaa derivaatoille ja lopputuloksena on yhtälö (2.14). Huomaa, että koska z_0 oli tässä mielivaltainen ja erityisesti osoitettiin ($m = 1$), että $F'(z_0)$ on olemassa, seuraa tästä myös, että $F \in H(\Omega)$. □

Esimerkki 5.5 Besselin funktiot J_n (niiden käytöstä löytyy tietoa Wikipediasta `https://en.wikipedia.org/wiki/Bessel_function`) voidaan määritellä integraalina

$$J_n(z) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - z\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi\,, \tag{5.3}$$

jossa $z \in \mathbb{C}$ ja $n \in \mathbb{N}$. Osoitetaan Lauseen 5.4 avulla, että näin saadut funktiot ovat *kokonaisia*. Olkoon D jokin suljettu kiekko, jonka keskipiste on z_0 ja säde $r > 0$. Tällöin se sisältyy suljettuun origokeskiseen kiekkoon $D_1 := \overline{B}_R(0)$, jossa $R := r + |z_0|$, ja riittääkin etsiä majorantti tässä suuremmassa kiekossa. Olkoon siis $|z| \leqslant R$ ja merkitään $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$, jolloin $|x|, |y| \leqslant R$. Kun $\varphi \in [0, \pi]$, saadaan kosinin eksponenttiesityksestä ja kolmioepäyhtälöstä arvio

$$\begin{aligned}
|\cos(n\varphi - z\sin\varphi)| &= \frac{1}{2}\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\varphi - z\sin\varphi)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n\varphi - z\sin\varphi)}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\varphi-(x+\mathrm{i}y)\sin\varphi)}\right| + \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n\varphi-(x+\mathrm{i}y)\sin\varphi)}\right|\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{y\sin\varphi} + \mathrm{e}^{-y\sin\varphi}\right) \leqslant \mathrm{e}^{|y|} \leqslant \mathrm{e}^R\,,
\end{aligned}$$

sillä $|\pm y\sin\varphi| \leqslant |y|$ ja eksponenttifunktio on kasvava reaaliarvoilla. Koska $\int_0^\pi \mathrm{e}^R \mathrm{d}\varphi = \pi\mathrm{e}^R < \infty$, on vakiofunktio e^R integrandin integroituva majorantti suljetussa kiekossa D. Kun $\varphi \in [0, \pi]$, on funktio $g(z) := \cos(n\varphi - z\sin\varphi)$ kahden kokonaisen funktion yhdisteenä myös kokonainen. Lauseen 5.4 mukaan on siis funktion $J_n(z)$ määrittelevä integraali itseisesti suppeneva ja näin saatu funktio analyyttinen koko kompleksitasossa. Ketjusäännön avulla saada myös esimerkiksi Besselin funktion derivaatalle esitys $J_n'(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\varphi \sin(n\varphi - z\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$.

5.2 Eulerin Γ-funktio

Sovelluksissa tulee usein vastaan integraaleja, joita ei voi laskea suoraan tähän mennessä käsiteltyjen alkeisfunktioiden avulla. Tällöin pyritään muokkaamaan integraalia esimerkiksi sopivasti valituilla muuttujanvaihdoilla muotoon, jossa sen voi sanoa jonkin tunnetun *erikoisfunktion* avulla. Näiden erikoisfunktioiden ominaisuuksia on taulukoitu paljon, ja niiden arvojen laskemista löytyy sekä tehokkaista approksimaatioita että valmiita numeerisia kirjastoja.

Yksi tavallisimmista vastaan tulevista erikoisfunktioita on **Eulerin Γ-funktio**. Se määritellään oikeassa puolitasossa integraalina

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\,, \qquad \text{kun } \operatorname{Re} z > 0\,. \tag{5.4}$$

Tässä t^w, $t > 0$ ja $w \in \mathbb{C}$, tarkoittaa aiemmin määriteltyä potenssifunktion päähaaraa $t^w := \mathrm{e}^{w \ln t}$, jossa $\ln t \in \mathbb{R}$, joten tällöin saadaan sen moduliksi

$$|t^w| = |\mathrm{e}^{w \ln t}| = |\mathrm{e}^{\operatorname{Re} w \ln t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{Im} w \ln t}| = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} w \ln t} = t^{\operatorname{Re} w}\,.$$

Tästä nähdään, että yhtälön (5.4) integraali on itseisesti suppeneva kaikilla $z \in \mathbb{C}$, joilla $x := \operatorname{Re} z > 0$. Jaetaan integrointiväli kahteen osaan pisteen $t = 1$ kohdalta. Vasemmalle puolelle jäävät arvot $0 < t \leqslant 1$, joilla $\ln t \leqslant 0$. Jos $\varepsilon > 0$ ja $x \geqslant \varepsilon$, pätee $\operatorname{Re}(z-1) = x - 1 \geqslant \varepsilon - 1 > -1$ ja näin ollen myös $\operatorname{Re}(z-1)\ln t \leqslant (\varepsilon - 1)\ln t$ aina kun $0 < t \leqslant 1$. Siten integraalia välin $[0, 1]$ yli voi arvioida

$$\int_0^1 \left|t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\right| \mathrm{d}t = \int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{\varepsilon-1}\mathrm{d}t = \Big/_{\!0}^{1} \frac{1}{\varepsilon}t^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} < \infty\,.$$

Integraali suppenee siis itseisesti, mutta tästä arviosta nähdään suoraan myös, että integraalin määräämä funktio $g_0(z) := \int_0^1 t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$, $\operatorname{Re} z > 0$, on analyyttinen. Nimittäin, jos D on on suljettu kiekko oikeassa puolitasossa, sen etäisyys imaginaariakselista ei voi nolla eli löytyy $\varepsilon > 0$, jolla $\operatorname{Re} z \geqslant \varepsilon$ aina kun $z \in D$. Yllä olevan laskun mukaan on tällöin $\left|t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\right| \leqslant M_0(t) := t^{\varepsilon-1}$, kaikilla $z \in D$ ja $0 < t \leqslant 1$. Koska lisäksi $\int_0^1 M_0(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\varepsilon} < \infty$, voidaan soveltaa Lausetta 5.4 ja päätellä, että funktio $g_0(z)$ on analyyttinen koko oikeassa puolitasossa.

Tarkastellaan sitten integraalia jäljellä olevan parametrijoukon $[1, \infty[$ yli. Kun $t \to \infty$, on $\ln t/t \to 0$ (L'Hôpitalin sääntö), joten aina kun $R > 0$, löytyy jokin $t_0(R) \geqslant 1$, jolla $R\frac{\ln t}{t} \leqslant \frac{1}{2}$, kun $t \geqslant t_0$. Näin ollen kun $\operatorname{Re} z =: x \leqslant R$ ja $t \geqslant t_0$ pätee myös $x\frac{\ln t}{t} \leqslant \frac{1}{2}$, joten saadaan arvio

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \left|t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\right| \mathrm{d}t &= \int_1^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \leqslant \int_1^{t_0} t^{x-1}\mathrm{d}t + \int_{t_0}^\infty \exp\left(-t(1 - x\ln t/t)\right)\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_1^{t_0} t^{R-1}\mathrm{d}t + \int_{t_0}^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}t\right)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{R}t_0^R + 2\mathrm{e}^{-\frac{t_0}{2}} < \infty\,.
\end{aligned}$$

Tästä laskusta seuraa, että integraali $\int_0^1 t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ suppenee *kaikilla* $z \in \mathbb{C}$, sillä $\operatorname{Re} z \leqslant R$ ainakin valinnalla $R := |z| + 1 > 0$. Saatiin siis tulos, että funktio

$$g_1(z) := \int_1^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\,, \qquad z \in \mathbb{C}\,, \tag{5.5}$$

on itseisesti suppenevan integraalin määrittelemä koko kompleksitasossa. Jos D on jokin kompleksitason suljettu kiekko, on se erityisesti rajoitettu, eli löytyy $R > 0$, jolla $|z| \leqslant R$ aina kun $z \in D$. Siis $\operatorname{Re} z \leqslant R$ kaikilla $z \in D$, joten kun valitaan $t_0(R) \geqslant 1$ kuten yllä ja määritellään

$$M_1(t) := \begin{cases} t^{R-1}\,, & \text{kun } 1 \leqslant t \leqslant t_0(R)\,, \\ \exp\left(-\frac{1}{2}t\right)\,, & \text{kun } t > t_0(R)\,, \end{cases} \tag{5.6}$$

pätee $\left|t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\right| \leqslant M_1(t)$, kaikilla $z \in D$ ja $t \geqslant 1$. Tällöin

$$\int_1^\infty M_1(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{R}t_0^R + 2\mathrm{e}^{-\frac{t_0}{2}} < \infty\,,$$

joten Lauseen 5.4 oletukset toteutuvat koko kompleksitasossa ja nähdään, että *funktio g_1 on kokonainen.*

Kaavan (5.4) integraalille pätee $\Gamma(z) = g_0(z) + g_1(z)$, joten yhdistämällä aiemmat tulokset nähdään heti, että integraali suppenee itseisesti aina kun $\operatorname{Re} z > 0$. Toisaalta molemmat funktioista g_0 ja g_1 ovat analyyttisiä oikeassa puolitasossa, joten voidaan myös päätellä, että **Eulerin Γ-funktio on analyyttinen koko oikeassa puolitasossa eli arvoilla** $\operatorname{Re} z > 0$. Tämän jälkeen **määritellään** $\Gamma(z)$ **arvoille** $\operatorname{Re} z \leqslant 0$ **analyyttisen jatkeen avulla**. Näille arvoille kaavan (5.4) integraali ei enää suppene, joten sitä ei voi käyttää tähän suoraan. Sen sijaan parametrien $t \geqslant 1$ yli integroimalla saatu funktion g_1 on kokonainen, joten se on rajoittumansa yksikäsitteinen analyyttinen jatke koko kompleksitasoon. Riittääkin etsiä analyyttinen jatke funktiolle g_0.

Oletetaan ensin, että $\operatorname{Re} z > 0$, ja palataan määritelmään

$$g_0(z) = \int_0^1 t^{z-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t \,.$$

Tässä oleva eksponenttifunktio voidaan kehittää Taylorin sarjaksi, jonka suppenemissäde on ääretön:

$$t^{z-1}\mathrm{e}^{-t} = t^{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-1)^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-1)^n t^{n+z-1} \,,$$

sillä $t^{z-1}t^n = \exp((z-1)\ln t)\exp(n \ln t) = \exp((n+z-1)\ln t)$. Ensimmäinen ($n = 0$) termi on siis t^{z-1}. Lopuille termeille ($n \geqslant 1$) pätee kaikilla $0 < t < 1$ yläraja $|(-1)^n t^{n+z-1}/n!| = t^{n+\operatorname{Re} z-1}/n! \leqslant 1/n!$, sillä tällöin $n + \operatorname{Re} z - 1 > 0$. Koska integrointiväli on äärellinen ja Weierstrassin M-testi 2.32 siis toteutuu, voi Taylorin sarjaa integroida termeittäin. Tästä saadaan

$$g_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-1)^n \int_0^1 t^{n+z-1} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \Big/_{0}^{1} \frac{1}{n+z} t^{n+z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} \,.$$

Voidaan siis määritellä funktiolla g_0 analyyttinen jatko h_0 käyttäen oikean puolen sarjaesitystä kaikissa pisteissä, joissa se suppenee

$$h_0(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} \,.$$

Tällöin h_0 on funktiosarja, joka on muodostettu jonosta $u_n(z) := \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}$. Tässä funktio u_n on rationaalifunktio, jolla on ensimmäisen kertaluvun napa pisteessä $z = -n$. Näin ollen kaikki jonon funktiot ovat analyyttisiä alueessa $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq -n \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}_0\} = \mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N}_0)$. Jos D on jokin suljettu kiekko joukossa Ω, ei sen etäisyys napojen joukosta $(-\mathbb{N}_0)$ voi olla nolla ja löytyy jokin $\varepsilon > 0$, jolla $|z + n| \geqslant \varepsilon$ kaikilla $z \in D$ ja $n \in \mathbb{N}_0$. Näin ollen $|u_n(z)| \leqslant \frac{1}{n!\varepsilon}$, kun $z \in D$, ja nähdään, että Weierstrassin M-testi toteutuu kiekossa D. Lauseen 2.33 mukaan on siis funktion h_0 määrittelevä sarja itseisesti suppeneva koko alueessa Ω ja $h_0 \in H(\Omega)$. Kun $m \in \mathbb{N}_0$ ja $|z+m| \leqslant \frac{1}{2}$ on $|u_n(z)| \leqslant \frac{2}{n!}$, kun $n \neq m$, joten näiden termien yli otettu summa pysyy äärellisenä kun $z \to -m$. Toisaalta tällöin $|u_m(z)| \to \infty$, joten pätee myös $|h_0(z)| \to \infty$ kun $z \to -m$. Näin ollen jokainen pisteistä $z = -m$ on funktion h_0 eristetty erikoispiste. Lisäksi nähdään näiden ylärajojen avulla, että

$$\lim_{z \to -m} [(z+m)h_0(z)] = \lim_{z \to -m} [(z+m)u_m(z)] = \frac{(-1)^m}{m!} \,.$$

Tästä seuraa, että piste $z = -m$ on funktion h_0 ensimmäisen kertaluvun napa, ja yllä olevasta raja-arvosta saadaan vastaavaksi residyksi $\operatorname{Res}(h_0, -m) = \frac{(-1)^m}{m!}$.

Koska Γ-funktio määriteltiin oikeassa puolitasossa lisäämällä funktioon g_0 kokonainen funktio g_1, seuraa yllä olevista laskuista, että kaavalla $\Gamma(z) = h_0(z) + g_1(z)$, $z \in \Omega$, saadaan määriteltyä maksimaalinen analyyttinen jatke integraalin (5.4) avulla määritellylle funktiolle. **Määritellään siis Eulerin Γ-funktio kaavalla**

$$\Gamma(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \int_1^{\infty} t^{z-1}\mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t \,, \qquad \text{kun } z \neq -m \,, \text{ kaikilla } m \in \mathbb{N}_0 \,. \tag{5.7}$$

Tämä funktion on analyyttinen lukuun ottamatta ensimmäisen kertaluvun napoja negatiivisen reaaliakselin pisteissä $z = -m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, joissa sen residyt ovat $\mathrm{Res}(\Gamma, -m) = \frac{(-1)^m}{m!}$.

Seuraavaa tulosta varten tarvitaan **analyyttisten funktioiden osittaisintegrointikaavaa**:

Lause 5.6 *Olkoon γ jokin polku, joka kulkee pisteestä z_0 pisteeseen z_1 alueessa Ω. Jos funktiot f ja g ovat analyyttisiä alueessa Ω, niin pätee*

$$\int_\gamma f'(z)g(z)\mathrm{d}z = \Big/_{z_0}^{z_1} f(z)g(z) - \int_\gamma f(z)g'(z)\mathrm{d}z\,. \tag{5.8}$$

Todistus Oletusten mukaan myös tulofunktio $F(z) = f(z)g(z)$ on analyyttinen alueessa Ω. Sen derivaatta on $F'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$, joten Lauseesta 1.32 seuraa, että

$$F(z_1) - F(z_0) = \int_\gamma F'(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma f'(z)g(z)\mathrm{d}z + \int_\gamma f(z)g'(z)\mathrm{d}z\,.$$

Tästä seuraa suoraan kaava (5.8). □

Tätä tulosta voidaan soveltaa erityisesti funktioihin $f(t) = -\mathrm{e}^{-t}$ ja $g(t) = t^z$ oikeassa puolitasossa, jolloin $f'(t) = \mathrm{e}^{-t}$ ja $g'(t) = \partial_t \exp(z \ln t) = z\frac{1}{t}\exp(z\ln t) = zt^{z-1}$. Näin ollen määritelmästä (5.4) saadaan osittaisintegroimalla tulos

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \Big/_0^\infty (-t^z\mathrm{e}^{-t}) - \int_0^\infty zt^{z-1}(-\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t = z\int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\,,$$

jossa tarvitaan $\mathrm{Re}\, z > 0$, jotta sijoitustermit varmasti häviäisivät. Tällöin oikean puolen integraali saa arvon $z\Gamma(z)$, joten ollaan päädytty tulokseen

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)\,, \tag{5.9}$$

joka pätee ainakin kun $\mathrm{Re}\, z > 0$. Toisaalta Γ-funktion yleisen määritelmän mukaan yhtälön vasen puoli on analyyttinen funktio, kunhan $z + 1 \neq -m$, $m \in \mathbb{N}_0$, eli $z \neq -n$, $n \in \mathbb{N}$, ja sen oikea puoli on analyyttinen funktio, kun $z \neq -m$, $m \in \mathbb{N}_0$. Luvun 5.1 alun perusteella, täytyy kaavan (5.9) siis päteä kaikilla $z \neq -m$, $m \in \mathbb{N}_0$ ja itse asiassa myös raja-arvomielessä kun $z \to 0$.

Tulosta (5.9) n kertaa iteroimalla saadaan yleisempi tulos

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)(z+n-2)\cdots z\Gamma(z)\,, \quad \text{kun } n \in \mathbb{N} \text{ ja } z \notin (-\mathbb{N}_0)\,. \tag{5.10}$$

Arvolla $z = 1$ tästä seuraa

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\cdots 2\cdot 1\cdot \Gamma(1) = n!\cdot\Gamma(1)\,.$$

Koska $\Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \Big/_0^\infty(-\mathrm{e}^{-t}) = 1$, nähdään, että **Γ-funktio yleistää kertomafunktion kompleksitasoon**, sillä

$$\Gamma(n+1) = n!\,, \quad \text{kun } n \in \mathbb{N}\,. \tag{5.11}$$

Johdetaan vielä lopuksi seuraava Γ-funktioiden kertolaskuominaisuus ja kerrataan samalla useita integraalinlaskentatemppuja:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}\,, \qquad \text{kun } z \notin \mathbb{Z}\,. \tag{5.12}$$

Aloitetaan olettamalla, että $z \in\,]0,1[$, jolloin sekä $\mathrm{Re}\, z = z > 0$ että $\mathrm{Re}\,(1-z) = 1 - z > 0$, joten voidaan käyttää molempiin termeihin kaavan (5.4) integraaliesitystä. Tehdään ensimmäiseen termiin muuttujanvaihto $u = \sqrt{t}$, jolle $t = u^2$ ja siten $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 2u > 0$, joten muuttujanvaihdossa integrointiväli $]0, \infty[$ säilyy ennallaan. Saadaan

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty u^{2z-2}\mathrm{e}^{-u^2}2u\mathrm{d}u = 2\int_0^\infty u^{2z-1}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u\,. \tag{5.13}$$

Näin ollen myös

$$\Gamma(1-z) = 2\int_0^\infty v^{2(1-z)-1}\mathrm{e}^{-v^2}\mathrm{d}v = 2\int_0^\infty v^{1-2z}\mathrm{e}^{-v^2}\mathrm{d}v\,,$$

joten

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = 4\int_0^\infty\int_0^\infty \left(\frac{u}{v}\right)^{2z-1}\mathrm{e}^{-u^2-v^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\,.$$

Tässä voidaan[2] ymmärtää iteroitu integraali kaksiulotteisena integraalina, joka otetaan joukon $(\mathbb{R}_+)^2 := \{(u,v) \,|\, u,v > 0\}$ yli. Siirrytään kaksiulotteisessa integraalissa napakoordinaatteihin $r = \sqrt{u^2+v^2}$ ja $\varphi = \mathrm{Arg}(u,v)$, jolloin $u = r\cos\varphi$ ja $v = r\sin\varphi$, jossa $r > 0$ ja $\varphi \in [0,\pi/2]$. Muistaen siirtoon liittyvän Jacobin determinantin, pätee $\mathrm{d}u\mathrm{d}v = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$ ja saadaan siis tulos

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = 4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^\infty \mathrm{d}r\, r\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)^{2z-1}\mathrm{e}^{-r^2} = 4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\,(\cot\varphi)^{2z-1}\times\int_0^\infty \mathrm{d}r\, r\mathrm{e}^{-r^2}\,.$$

Tässä r-integraali voidaan laskea suoraan muuttujanvaihdolla $t = r^2$, josta saadaan $\int_0^\infty \mathrm{d}r\, 2r\mathrm{e}^{-r^2} = \int_0^\infty \mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{-t} = \Big/_0^\infty(-\mathrm{e}^{-t}) = 1$. Näin ollen

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = 2\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\,(\cot\varphi)^{2z-1}\,.$$

Jäljellä olevan integraalin laskeminen onkin vähän hankalampaa. Tehdään siinä ensin muuttujanvaihto $x = (\cot\varphi)^2$, jolle pätee $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} = 2\cot\varphi\frac{\mathrm{d}\cot\varphi}{\mathrm{d}\varphi} = 2\cot\varphi\frac{-\sin^2\varphi-\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi} = -2\cot\varphi(1+\cot^2\varphi)$. Kun $0 < \varphi < \pi/2$ ovat sen sini ja kosini molemmat positiivisia, joten myös $\cot\varphi > 0$. Nähdään, että $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} < 0$ koko integrointivälillä, joten muuttujanvaihto on aidosti vähenevä koko integrointivälillä ja kuvaa sen (bijektiivisesti) joukoksi $]0,\infty[$. Saadaan siis

$$\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\,(\cot\varphi)^{2z-1} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\, 2\cot\varphi(1+\cot^2\varphi)\frac{1}{1+\cot^2\varphi}(\cot\varphi)^{2z-2} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{d}x\,\frac{x^{z-1}}{1+x}\,.$$

Tämä viimeinen integraali voidaan laskea residylausetta soveltamalla. Lasku on tehty Esimerkissä **??**, jonka mukaan

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\,\frac{x^{z-1}}{1+x} = \frac{\pi}{\sin\pi z}\,.$$

Keräämällä kaikki yllä johdetut tulokset yhteen, päädytään tulokseen

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}\,,\qquad \text{kun } 0 < z < 1\,.$$

Vasen puoli on kahden analyyttisen funktion tulo alueessa, jossa kompleksitasosta on poistettu napapisteet $z = 0,-1,\ldots$ ja $1-z = 0,-1,-2,\ldots$, eli pisteet $z \in \mathbb{Z}$. Toisaalta $\sin\pi z = 0$, jos ja vain jos $z \in \mathbb{Z}$, joten myös oikea puoli on analyyttinen funktio tässä samassa alueessa. Koska nämä kaksi analyyttistä funktiota saavat samat arvot janalla $]0,1[$ täytyy niiden olla samoja koko alueessa. Saatiin siis johdettua haluttu kaava (5.12).

[2](MAT) Tuloksessa käytetään Fubinin lausetta esittämään iteroitu integraali tuloavaruuden yli otettuna integraalina. Lausetta saa käyttää, sillä integrandi on positiivinen mitallinen funktio tuloavaruudessa.

Taulukko 5.1: **Yhteenveto Eulerin Γ-funktion ominaisuuksista.**

Γ-funktio on analyyttinen, lukuun ottamatta ensimmäisen kertaluvun napoja pisteissä $z = 0, -1, -2, \ldots$,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\,, \qquad \text{kun } \operatorname{Re} z > 0$$

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n} + \int_1^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\,, \qquad \text{kun } z \neq 0, -1, -2, \ldots$$

Seuraavat ominaisuudet pätevät kaikkialla kompleksitasossa napapisteitä lukuun ottamatta:

$$\Gamma(n+1) = n!\,, \qquad \text{kun } n \in \mathbb{N}$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)\,, \qquad \text{kun } z \neq 0, -1, -2, \ldots$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}\,, \qquad \text{kun } z \notin \mathbb{Z}$$

Kaavoja (5.12) ja (5.10) käyttämällä voi laskea tarkkoja Γ-funktion arvoja puoliluvuille $z = n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. Kaavasta (5.12) saadaan arvolla $z = \frac{1}{2}$ tulos $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi$ ja toisaalta integraaliesityksestä (5.4) nähdään suoraan, että $\Gamma(z) > 0$, kun $z > 0$, joten täytyy olla

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,.$$

Tämän jälkeen kaavasta (5.10) saadaan arvolla $z = \frac{1}{2}$ tulos

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(k - \frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}\,, \quad \text{kun } n \in \mathbb{N}\,,$$

ja vastaavasti arvolla $z = -n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, tulos

$$\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n\sqrt{\pi}}{\prod_{k=1}^{n}\left(k - \frac{1}{2}\right)}\,, \quad \text{kun } n \in \mathbb{N}\,.$$

Yhteenveto Eulerin Γ-funktion tärkeimmistä ominaisuuksista löytyy Taulukosta 5.1 ja lisää tietoa, kuten esimerkiksi kuvaajia funktion arvoista kompleksitasossa, löytyy esimerkiksi Wikipediasta (`https://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_function`).

Esimerkki 5.7 Kun $p > 1$, esitä seuraavan integraalin arvo Eulerin Γ-funktion ja Riemannin ζ-funktion avulla

$$I(p) := \int_1^\infty \frac{(\ln x)^{p-1}}{x(x+1)}\mathrm{d}x\,. \tag{5.14}$$

Ratkaisu: Hankkiudutaan ensin eroon logaritmista integraalissa ottamalla se uudeksi integrointimuuttujaksi: tehdään muuttujanvaihto $t = \ln x$, jolle $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} > 0$, ja se siis kuvaa integrointivälin $[1, \infty[$ väliksi $[0, \infty[$. Tällöin $x = \mathrm{e}^t$ ja saadaankin

$$I(p) = \int_1^\infty \frac{(\ln x)^{p-1}}{x(x+1)}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{1+\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{d}t\,,$$

joka alkaakin jo muistuttaa Γ-funktion määritelmää. Integraalissa $t > 0$, joten $0 < \mathrm{e}^{-t} < 1$, ja voidaan siis kehittää nimittäjän sisältävä termi geometriseksi sarjaksi,

$$\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-\mathrm{e}^{-t})^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \mathrm{e}^{-nt}\,.$$

Tämän voi sijoittaa yllä olevaan integraaliin ja vaihtaa integroinnin ja summauksen järjestystä,[3] josta saadaan

$$I(p) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^{\infty} t^{p-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^{\infty} t^{p-1}\mathrm{e}^{-(n+1)t}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^{\infty} t^{p-1}\mathrm{e}^{-(n+1)t}\mathrm{d}t\,.$$

Tekemällä muuttujanvaihto $u = (n+1)t$, saadaan lopulta

$$\begin{aligned} I(p) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^{\infty}\left(\frac{u}{n+1}\right)^{p-1}\mathrm{e}^{-u}\frac{1}{n+1}\mathrm{d}u = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^p}\int_0^{\infty}u^{p-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u \\ &= \Gamma(p)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m^p}\,, \end{aligned}$$

missä viimeisessä vaiheessa on tehty summausmuuttujan vaihto $m = n+1$. Merkitään jäljellä olevaa sarjaa $S(p) := \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m^p}$. Vielä pitäisi esittää sarjan arvo ζ-funktiota käyttäen. Huomataan, että itseisarvojen muodostama sarja on itse asiassa Dirichlet'n sarja $\sum_{m=1}^{\infty} m^{-p} < \infty$, sillä $p > 1$ ja sarja suppenee niin kuin Esimerkissä 2.21 näytettiin. Näin ollen voidaan sen positiiviset termit (parittomat m) ja negatiiviset termit (parilliset m) summata erikseen, ja pätee

$$\begin{aligned} S(p) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^p} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^p} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^p} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^p} - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^p} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} - 2^{1-p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p} = (1-2^{1-p})\zeta(p)\,. \end{aligned}$$

Vastaus: $I(p) = (1-2^{1-p})\Gamma(p)\zeta(p)$, kun $p > 1$.

5.3 Eulerin B-funktio

Eulerin betafunktion määritelmä lähtee liikkeelle integraalista

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t\,, \qquad \text{kun } \mathrm{Re}\,p, \mathrm{Re}\,q > 0\,.$$

Koska integrandin itseisarvolle pätee $|t^{p-1}(1-t)^{q-1}| = t^{\mathrm{Re}\,p-1}(1-t)^{\mathrm{Re}\,q-1}$ suppenee se itseisesti yllä merkityillä arvoilla $\mathrm{Re}\,p, \mathrm{Re}\,q > 0$ (integraalin voi tehdä kahdessa osassa, ensin yli arvojen $0 < t < \frac{1}{2}$, jolloin $1 - t \geqslant \frac{1}{2}$ ja siten $(1-t)^{\mathrm{Re}\,q-1} \leqslant 2$, ja sen jälkeen yli arvojen $\frac{1}{2} \leqslant t < 1$, jolloin $t^{\mathrm{Re}\,p-1} \leqslant 2$). Tästä nähdään myös, että integraalin määräämä funktio on analyyttinen sekä muuttajassa p, kun q on kiinnitetty, että muuttajassa q, kun p on kiinnitetty (esimerkiksi, jos D on suljettu kuula oikeassa puolitasossa ja $\mathrm{Re}\,q > 0$, löytyy $\varepsilon > 0$, jolla $\mathrm{Re}\,p \geqslant \varepsilon$ ja siten $|t^{p-1}(1-t)^{q-1}| \leqslant t^{\varepsilon-1}(1-t)^{\mathrm{Re}\,q-1}$ kaikilla $p \in D$). Tämän jälkeen B-funktiolle tehdään analyyttinen

[3](MAT) Järjestyksen vaihdon voi perustella käyttäen luvun 2.2.1 tulosta "(2)". Nimittäin itseisarvojen yli summatessa saadaan geometrinen sarja $\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-nt} = 1/(1-\mathrm{e}^{-t}) \leqslant 1 + t^{-1}$. (Tässä esiintyvän epäyhtälön voi todistaa tutkimalla funktiota $g(t) := \mathrm{e}^{-t}(1+t)$, $t \geqslant 0$: koska $g(0) = 1$ ja $g'(t) = -(1+t)\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-t} = -t\mathrm{e}^{-t} \leqslant 0$, on funktio g siis vähenevä ja pätee $g(t) \leqslant 1$ kaikilla $t \geqslant 0$. Tästä seuraa ensin epäyhtälö $\mathrm{e}^{-t} \leqslant \frac{1}{1+t}$, josta edelleen $1 - \mathrm{e}^{-t} \geqslant \frac{t}{1+t}$.) Näin ollen $\int_0^{\infty} t^{p-1}\mathrm{e}^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\infty} t^{p-1}\mathrm{e}^{-t}(1+t^{-1}) = \Gamma(p) + \Gamma(p-1) < \infty$, sillä oletettiin, että $p > 1$.

jatke muualle kompleksitasoon samaan tapaan kuin Γ-funktiolle tehtiin edellisessä luvussa. Jatke on helpointa tehdä johtamalla samalla esitys B-funktiolle Γ-funktion avulla.

Oletetaan siis ensin, että $p, q > 0$, jolloin voidaan käyttää kaavassa (5.13) johdettua integraaliesitystä arvoille $\Gamma(p)$ ja $\Gamma(q)$. Tästä saadaan

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 2\int_0^\infty u^{2p-1}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u \times 2\int_0^\infty v^{2q-1}\mathrm{e}^{-v^2}\mathrm{d}v = 4\int_0^\infty \mathrm{d}u \int_0^\infty \mathrm{d}v\, u^{2p-1}v^{2q-1}\mathrm{e}^{-u^2-v^2}\,.$$

Kuten edellisessä luvussa, tehdään tässä kaksiulotteisessa integraalissa muuttujanvaihto napakoordinaatteihin: $u = r\cos\varphi$ ja $v = r\sin\varphi$, jossa $r > 0$ ja $\varphi \in [0, \pi/2]$. Saadaan tulos

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= 4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^\infty \mathrm{d}r\, r\, r^{2p-1}r^{2q-1}\,(\cos\varphi)^{2p-1}\,(\sin\varphi)^{2q-1}\,\mathrm{e}^{-r^2}\\ &= 2\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\,(\cos\varphi)^{2p-1}\,(\sin\varphi)^{2q-1}\times\int_0^\infty \mathrm{d}r\, 2r\, r^{2(p+q-1)}\mathrm{e}^{-r^2}\,.\end{aligned}$$

Tässä jälkimmäisestä integraalista muuttujanvaihdolla $t = r^2$ saadaan $\int_0^\infty \mathrm{d}r\,2r\,r^{2(p+q-1)}\mathrm{e}^{-r^2} = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, t^{p+q-1}\mathrm{e}^{-t} = \Gamma(p+q)$, sillä $p+q > 0$. Tehdään kulmaintegraaliin muuttujanvaihto $x = (\cos\varphi)^2$, jolloin $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} = -2\cos\varphi\sin\varphi < 0$ kun $0 < \varphi < \pi/2$. Muuttujanvaihto on siis aidosti vähenevä koko integrointivälillä ja kuvaa sen (bijektiivisesti) joukoksi $]0, 1[$. Saadaan

$$\begin{aligned}2\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\,(\cos\varphi)^{2p-1}\,(\sin\varphi)^{2q-1} &= \int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\,2\cos\varphi\sin\varphi\,(\cos\varphi)^{2(p-1)}\,(\sin\varphi)^{2(q-1)}\\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x\, x^{p-1}(1-x)^{q-1} = B(p,q)\,,\end{aligned}$$

sillä $(\sin\varphi)^2 = 1 - (\cos\varphi)^2$.

Ollaan siis johdettu tulos $\Gamma(p)\Gamma(q) = B(p,q)\Gamma(p+q)$ arvoille $p, q > 0$. Kuten aiemmin mainittiin, seuraa integraaliesityksestä (5.4), että $\Gamma(p,q) > 0$ kun $p + q > 0$, joten saadaan yhtälö

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\,, \tag{5.15}$$

joka pätee aina kun $p, q > 0$. Tämän jälkeen, kun $q > 0$, nähdään että yhtälö pätee kaikilla $\mathrm{Re}\, p > 0$ aiemmin johdettujen analyyttisyysominaisuuksien takia muuttujassa p. Lopulta voidaan valita jokin $\mathrm{Re}\, p > 0$ ja käyttää hyväksi molempien puolien analyyttisyyttä muuttujassa q ja nähdään, että se pätee kaikilla $\mathrm{Re}\, p, \mathrm{Re}\, q > 0$. Yhtälön oikea puoli tarjoaa tämän jälkeen analyyttisen jatkeen funktiolle $B(p,q)$ kunhan $p, q, p+q \neq 0, -1, -2, \ldots$ ja $\Gamma(p+q) \neq 0$.

Yhteenveto Eulerin B-funktion tärkeimmistä ominaisuuksista löytyy Taulukosta 5.2 ja lisää tietoa, kuten esimerkiksi kuvaajia funktion arvoista kompleksitasossa, löytyy esimerkiksi Wikipediasta (`https://en.wikipedia.org/wiki/Beta_function`).

Esimerkki 5.8 Kun $p > \frac{3}{2}$, esitä seuraavan integraalin arvo Eulerin B-funktion avulla

$$I(p) := \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+4)^p}\mathrm{d}x\,. \tag{5.16}$$

Ratkaisu: Tavoitteena olisi päästä muuttujanvaihdolla integraaliin välin $]0, 1[$ yli. Tehdään tämä siten, että integrandissa oleva yleinen potenssi tuottaa termin t^p, joka onnistuu valinnalla

$$t = \frac{x^2}{x^2+4}\,,\ x > 0 \quad\Rightarrow\quad x^2 = \frac{4t}{1-t}\,,\ 0 < t < 1 \quad\Rightarrow\quad 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{4}{(1-t)^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} > 0\,.$$

Taulukko 5.2: **Yhteenveto Eulerin B-funktion ominaisuuksista.**

Eulerin betafunktiolle pätee

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t\,, \qquad \text{kun } \operatorname{Re} p, \operatorname{Re} q > 0$$

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = B(q,p)$$

B-funktion on analyyttinen sekä argumentissa p että q, pois lukien Γ-funktioiden navat ja arvot, joilla $\Gamma(p+q) = 0$.

B-funktion avulla voi laskea binomikertoimia:

$$B(n+1,m+1) = \frac{n!m!}{(n+m+1)!} = \left[(n+m+1)\binom{n+m}{n}\right]^{-1}, \qquad \text{kun } n,m \in \mathbb{N}$$

Tästä nähdään, että muuttujanvaihto kuvaa integrointivälin kasvavasti väliksi $]0,1[$, ja saadaan

$$\begin{aligned} I(p) &= \int_0^\infty \left(\frac{x^2}{x^2+4}\right)^p (x^2)^{1-p-\frac{1}{2}} x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 t^p \left(\frac{4t}{1-t}\right)^{\frac{1}{2}-p} \frac{2}{(1-t)^2}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 2^{2(\frac{1}{2}-p)+1} t^{p+\frac{1}{2}-p}(1-t)^{p-\frac{1}{2}-2}\mathrm{d}t = 2^{2-2p}\int_0^1 t^{\frac{3}{2}-1}(1-t)^{p-\frac{3}{2}-1}\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Viimeinen integraali antaakin Eulerin B-funktion arvon $B\left(\frac{3}{2}, p-\frac{3}{2}\right)$, sillä $p - \frac{3}{2} > 0$.
Vastaus: $I(p) = 2^{2-2p}B\left(\frac{3}{2}, p-\frac{3}{2}\right)$, kun $p > \frac{3}{2}$.