1 Eulerin Γ-funktio

Lähdetään liikkeelle määritelmästä

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t\,, \quad \text{kun } \mathrm{Re}\, z > 0$$

Tästä saadaan maksimaalinen analyyttinen jatke

Eulerin Gammafunktio

Kaikilla kompleksiluvuilla z, kunhan $z \neq 0, -1, -2, \ldots$,

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \int_1^\infty t^{z-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$$

- Γ-funktio on analyyttinen, lukuun ottamatta ensimmäisen kertaluvun napoja pisteissä $z = 0, -1, -2, \ldots$
- $\Gamma(x) > 0$, kun $x > 0$ (seuraa integraalimääritelmästä)

2 Γ-funktion perusominaisuuksia

Seuraavat ominaisuudet pätevät kaikkialla kompleksitasossa napapisteitä lukuun ottamatta,

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)\,, \qquad z \neq 0, -1, -2, \ldots$$

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)(z+n-2)\cdots z\Gamma(z)\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}\,, \qquad z \notin \mathbb{Z}$$

Erikoisarvoja, joissa $n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma(n+1) = n!\,, \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Residylauseesta, summa yli f:n napojen z_n

$$\int_0^\infty x^\alpha f(x)\mathrm{d}x = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\alpha}} \sum_n \mathrm{Res}\Big(\mathrm{e}^{\alpha L(z)} f(z), z_n\Big) \;, \quad \alpha \notin \mathbb{Z}$$

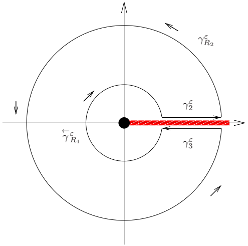
1. Esitetään potenssi logaritmin haaralla $L(z)$, jonka leikkaus on *positiivisella* reaaliakselilla

$$F(z) := z^\alpha f(z) = \mathrm{e}^{\alpha L(z)} f(z)\,, \qquad L(z) := \overline{\ln}(-z) + \mathrm{i}\pi$$

2. Leikkausta ylä- ja alapuolelta lähestyttäessä pätee $(x > 0)$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} L(x+\mathrm{i}\varepsilon) = \mathrm{Ln}\, x\,, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0^+} L(x-\mathrm{i}\varepsilon) = \mathrm{Ln}\, x + \mathrm{i}2\pi$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{\varepsilon\to 0^+} \big(F(x+\mathrm{i}\varepsilon) - F(x-\mathrm{i}\varepsilon)\big) = (1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\alpha}) x^\alpha f(x)\,.$$



Tästä saadaan

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}\,, \qquad 0 < p < 1$$

Samaa ideaa käyttäen johdetaan myös tulokset (ks. moniste Luku 3.4.6)

Kun $f = F/G$ eli meromorfinen funktio:

$$\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x = -\sum_n \mathrm{Res}(L(z)f(z), z_n)$$

$$\int_0^\infty \ln x\, f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sum_n \mathrm{Res}\big(L(z)^2 f(z), z_n\big) + \mathrm{i}\pi \sum_n \mathrm{Res}(L(z)f(z), z_n)$$

5 Eulerin B-funktio

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t\,, \quad \mathrm{Re}\, p, \mathrm{Re}\, q > 0$$

Eulerin Betafunktio

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

- (*symmetrinen*) $B(q,p) = B(p,q)$
- B-funktion on *analyyttinen* sekä argumentissa p että q, poislukien Γ-funktioiden navat ja arvot, joilla $\Gamma(p+q) = 0$
- B-funktion avulla voi laskea binomikertoimia: kun $n, m \in \mathbb{N}$

$$B(n+1, m+1) = \frac{n!m!}{(n+m+1)!} = \left[(n+m+1)\binom{n+m}{n}\right]^{-1}$$

Asymptoottinen sarjakehitelmä

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (x \to \infty)$$

- Näyttää muodollisesti sarjakehitelmältä, mutta *suppenemista ei vaadita* millään x
- Oletetaan sen sijaan, että osasummat $S_N(x) := \sum_{n=1}^{N} u_n(x)$ muodostavat yhä paremman approksimaation funktiosta $f(x)$ yllä suluissa merkityllä rajalla (eli kun $x \to \infty$)
- $\Rightarrow$ sarjan osasummat antavat mielivaltaisen hyvän kuvan funktion f käytöksestä *asymptoottisesti*, kun $x \to \infty$
- Approksimaation virhettä on helpointa kuvata käyttäen *suuruusluokkanotaatioita* "O" ja "o"

7 Suuruusluokkanotaatiot "O" ja "o"

"Big O notation"

$$f(x) = O(M(x))\,, \quad \text{kun } x \to \infty$$

jos löytyy sellaiset x_0 ja vakio $C > 0$, että

$$|f(x)| \leq C|M(x)|\,, \quad \text{kaikilla } x \geq x_0$$

- Jos löytyy äärellinen $\lim_x f(x)/M(x)$, on myös $f(x) = O(M(x))$
- Yleistyksiä: kompleksifunktiolle f

$$f(z) = O(z^3)\,, \quad \text{kun } z \to 0\,,$$

tarkoittaa, että löytyy vakio $C > 0$ ja $\varepsilon > 0$, joilla

$$|f(z)| \leq C|z^3| = C|z|^3\,, \quad \text{kun } 0 < |z| \leq \varepsilon$$

Suuruusluokkanotaatiot "O" ja "o"

"Small O notation"

$$f(x) = o(M(x))\,, \quad \text{kun } x \to \infty\,.$$

jos **jokaista** $\varepsilon > 0$ kohti löytyy reaaliluku x_0, jolla

$$|f(x)| \leq \varepsilon |M(x)|\,, \quad \text{kaikilla } x \geq x_0\,. \tag{1}$$

- f on asymptoottisesti "selvästi pienempi" kuin M, kun $x \to \infty$
- Jos $M(x) \neq 0$ ja $\lim_x f(x)/M(x) = 0$, on myös $f(x) = o(M(x))$
- Yleistyy kompleksifunktioille ja muille raja-pisteille, kuten edellä

9 Suuruusluokkanotaatiot "O" ja "o"

- Jos $f(x) = o(M(x))$, pätee selvästi myös $f(x) = O(M(x))$, muttei välttämättä toisin päin
- Merkintöjä käytetään usein kuvaamaan approksimaation virhettä: esimerkiksi

$$f(x) = h(x) + O(M(x)) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - h(x) = O(M(x))$$

- Muita mahdollisia merkintöjä:

$$f(x) = O(M(x)) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in O(M(x)) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \mathcal{O}(M(x))$$

- Lisää tietoa ja vaihtoehtoisia suuruusluokan määritelmiä Wikipediasta

10 Asymptoottiset sarjakehitelmät

Matematiikassa käytetty määritelmä vaatii

- **skaalafunktiojonon** $w_n(x)$: $\quad w_n(x) = o(w_{n-1}(x))$

  (tyypillinen valinta voisi olla $w_n(x) := x^{-n}$)

- $u_n(x) := a_n w_n(x)$, jollakin vakiolla a_n

Tällöin jono (u_n) muodostaa funktion f *asymptoottisen sarjan*, kun $x \to \infty$, jos kaikilla $N \in \mathbb{N}$ pätee

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x) + o(w_N(x)) \quad (x \to \infty)\,.$$

Tätä merkitään:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n(x) \quad (x \to \infty)$$

- Esimerkiksi tapauksessa $w_n(x) = x^{-n}$, $n = -1, 0, 1, \ldots$, siis

$$f(x) \sim \sum_{n=-1}^{\infty} a_n x^{-n} \quad (x \to \infty)$$
$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to\infty} x^N \left| f(x) - \sum_{n=-1}^{N} a_n x^{-n} \right| = 0\,, \text{ kaikilla } N \in \mathbb{N}$$

- Ei tarvitse vaatia varsinaisen sarjan suppenemista millään x tai raja-arvon $\lim_{x\to\infty} f(x)$ olomassaoloa
- Yleensä skaalafunktiot valitaan siten, että vain kertoimet a_n muuttuvat, kun samassa kannassa kehitettyjä asymptoottisia sarjoja lasketaan yhteen, kerrotaan tai integroidaan
- Lisää näin määriteltyjen asymptoottisten sarjakehitelmien ominaisuuksista löytyy Wikipediasta (https://en.wikipedia.org/wiki/Asymptotic_expansion)

Seuraavat kolme matemaattista työkalua tuottavat lähes poikkeuksetta approksimaatioita asymptoottisina sarjakehitelminä:

1. Funktion approksimointi Taylorin polynomilla, kun sen Taylorin sarja ei suppene
2. Integraalien approksimointi satulapistemenetelmällä
3. Eulerin–Maclaurinin summakaava

Käytetään, koska

- näin saadaan nopeammin konvergoiva numeerinen menetelmä
- ei ole muita tapoja ratkaista asymptoottista käytöstä

13 Taylorin polynomi reaalifunktion approksimaationa

Oletukset: on annettu

1. reaaliluvut $a < b$
2. funktio $f(x)$, joka on jatkuvasti $n+1$ kertaa derivoituva arvoilla $a < x < b$
3. $x_0 \in \,]a, b[$

$$\Rightarrow \quad f(x) = P_n(x; x_0) + R_n(x; x_0)\,, \qquad \text{kun } a < x < b$$

- P_n on funktion f *asteen n Taylorin polynomi* pisteessä x_0,

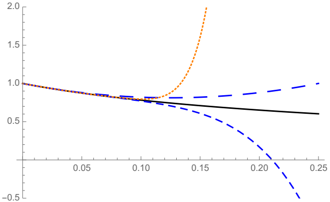
$$P_n(x; x_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

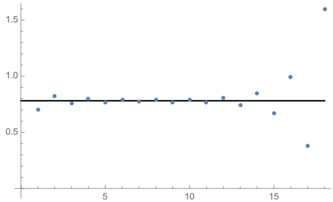
- R_n on asteen n *jäännöstermi*

$$R_n(x; x_0) := \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n \mathrm{d}t = O((x - x_0)^{n+1})$$

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-u}(1+ux)^{-p}\mathrm{d}u \sim \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\Gamma(p+k)}{\Gamma(p)} x^k \quad (x \to 0^+)$$

- Virhe toteuttaa $|R_n(x)| \leq |a_{n+1}|x^{n+1} \leq [(p+n)x]^{n+1}$
- (vasen kuva alla) $f(x)$, $x \in [0, 0.25]$, ja polynomiapproksimaatiot $P_2(x)$, $P_5(x)$ ja $P_{10}(x)$
- (oikea kuva alla) $f(0.1)$ ja pisteet polynomiapproksimaatioista $P_n(0.1)$, kun $n = 1, 2, \ldots, 18$





15 Satulapisteapproksimaatio

Satulapisteapproksimaatiota (engl. *saddle point approximation* tai *method of steepest descent*) käytetään tutkimaan seuraavan integraalin $T \to \infty$ asymptotiikkaa:

$$F(T) := \int_\gamma f(z) \mathrm{e}^{Tg(z)} \mathrm{d}z \,, \qquad T \in \mathbb{R}$$

- f, g analyyttisiä tai vähintään kaksi kertaa jatkuvasti derivoituvia
- usein γ kulkee reaaliakselia pitkin
- näihin päädytään esim. ratkaisemalla DY Fourier'n muunnoksen avulla:

Esim. vapaan hiukkasen Schrödingerin yhtälön ratkaisu $\psi_t(x)$,

$$\psi_t(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}p}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(px - t\frac{1}{2m}p^2\right)} \widehat{\psi}_0(p)$$

jossa $\widehat{\psi}_0(p)$ riippuu vain alkutilasta ja $m > 0$ on hiukkasen massa

Satulapisteapproksimaatio, algoritmina:

1. Etsitään kaikki funktion g *kriittiset pisteet* eli z_0, *joilla* $g'(z_0) = 0$
2. Toivotaan, että pisteet ovat *ei-degeneroituneita* eli $g''(z_0) \neq 0$ (jos $g''(z_0) = 0$, tulee vaikeuksia...)
3. Muokataan Cauchyn lauseen avulla integrointipolku γ poluksi γ_0, tavoitteena että
   - polkua γ_0 pitkin $\mathrm{Re}\, g(z)$ on mahdollisimman pieni
   - polku γ_0 kulkee "satulapistereittiä pitkin" vähintään yhden kriittisen pisteen kautta

Tällöin saadaan suurilla $T \gg 1$

$$F(T) = \int_\gamma f(z) \mathrm{e}^{Tg(z)} \mathrm{d}z \approx \sum_{z_0 \in \gamma_0} (\pm 1) f(z_0) \mathrm{e}^{g(z_0)T} \sqrt{\frac{2\pi}{-g''(z_0)T}}$$

Tarkkuus voi riippua paljonkin sopivan polun γ_0 löytämisestä: pisteiden z_0 "ulkopuolella" käyrällä γ_0 arvioidaan

$$\left| f(z) \mathrm{e}^{Tg(z)} \right| = |f(z)| \mathrm{e}^{T \mathrm{Re}\, g(z)}$$

17 Yhden satulapisteen reaalinen tapaus

Oletetaan, että

- polku γ kulkee reaaliakselia pitkin pisteestä a pisteeseen $b > a$
- g on kahdesti jatkuvasti derivoituva funktio
- $g''(x) < 0$ kaikilla $x \in (a, b)$
- löytyy *kriittinen piste* $x_0 \in (a, b)$, jossa $g'(x_0) = 0$

Morsen lemma

Löytyy jatkuvasti derivoituva reaalifunktio h, jolla $h(x_0) = 0$, $h'(x) > 0$ kaikilla x, $h'(x_0) = 1$, ja

$$g(x) = g(x_0) + \frac{1}{2}g''(x_0)h(x)^2\,, \quad a < x < b$$

$\Rightarrow$ voidaan tehdä muuttujanvaihto $t = h(x)$: kun $c_0 := -g''(x_0)$

$$F(T) = \int_{-\alpha}^{\beta} G(t) \mathrm{e}^{Tg(x_0) - \frac{1}{2} c_0 T t^2} \mathrm{d}t \,, \qquad G(t) := \frac{f(h^{-1}(t))}{h'(h^{-1}(t))}$$

$$\overset{u=\sqrt{c_0 T} t}{\Rightarrow} F(T) = \int_{-\alpha\sqrt{c_0 T}}^{\beta\sqrt{c_0 T}} G\Big(u(c_0 T)^{-\frac{1}{2}}\Big) \, \mathrm{e}^{Tg(x_0) - \frac{1}{2} u^2} \frac{1}{\sqrt{c_0 T}} \mathrm{d}u$$

$\Rightarrow$ voidaan tehdä muuttujanvaihto $t = h(x)$: kun $c_0 := -g''(x_0)$

$$F(T) = \int_{-\alpha}^{\beta} G(t) \mathrm{e}^{Tg(x_0) - \frac{1}{2} c_0 T t^2} \mathrm{d}t \,, \qquad G(t) := \frac{f(h^{-1}(t))}{h'(h^{-1}(t))}$$

$$\overset{u=\sqrt{c_0 T}t}{\Longrightarrow} F(T) = \int_{-\alpha\sqrt{c_0 T}}^{\beta\sqrt{c_0 T}} G\left(u(c_0 T)^{-\frac{1}{2}}\right) \mathrm{e}^{Tg(x_0) - \frac{1}{2} u^2} \frac{1}{\sqrt{c_0 T}} \mathrm{d}u$$

Satulapisteapproksimaatio, yksi reaalinen satulapiste

$$F(T) \approx f(x_0) \mathrm{e}^{g(x_0)T} \sqrt{\frac{2\pi}{-g''(x_0)T}} \qquad (T \to \infty)$$

$$F(T) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G^{(2n)}(0)}{(2n)!!} (c_0 T)^{-n} \mathrm{e}^{g(x_0)T} \sqrt{\frac{2\pi}{c_0 T}} \qquad (T \to \infty)$$

19 Parillisten ja parittomien funktioiden yli integrointi

Parillisuuden määritelmä

Funktio $f(x)$ on **parillinen**, jos $f(-x) = f(x)$, ja
pariton, jos $f(-x) = -f(x)$

Kaikilla $R > 0$ pätee

- Jos f on *parillinen*,

$$\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{R} f(x)\mathrm{d}x\,, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

- Jos f on *pariton*,

$$\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x = 0\,, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 0$$

20 Useamman satulapisteen reaalinen tapaus

Oletetaan, että

- polku γ kulkee reaaliakselia pitkin pisteestä a pisteeseen $b > a$
- g on kahdesti jatkuvasti derivoituva funktio

1. Etsitään funktion g *aidot lokaalit maksimit* eli pisteet x_i, joissa $g'(x_i) = 0$ ja $g''(x_i) < 0$
2. Koska g'' on jatkuva, löytyy jokaista pistettä x_i kohti jokin *väli (a_i, b_i), jossa $g'' < 0$*
3. Sovelletaan satulapisteapproksimaatiota jokaiselle välille,

$$F(T) \approx \sum_i f(x_i) \mathrm{e}^{g(x_i) T} \sqrt{\frac{2\pi}{-g''(x_i) T}} \qquad (T \to \infty)$$

Virhettä varten täytyy etsiä jokin estimaatti myös välien (a_i, b_i) ulkopuolelle jäävälle integraalin osalle

Kompleksi satulapisteapproksimaatio, algoritmina:

1. Etsitään kaikki funktion g *kriittiset pisteet* eli *z_0, joilla $g'(z_0) = 0$*
2. Toivotaan, että pisteet ovat *ei-degeneroituneita* eli $g''(z_0) \neq 0$ (jos $g''(z_0) = 0$, tulee vaikeuksia...)
3. Muokataan Cauchyn lauseen avulla integrointipolku γ poluksi γ_0, tavoitteena että
   - polkua γ_0 pitkin $\mathrm{Re}\, g(z)$ on mahdollisimman pieni
   - polku γ_0 kulkee "satulapistereittiä pitkin" vähintään yhden kriittisen pisteen kautta

Tällöin saadaan suurilla $T \gg 1$

$$F(T) = \int_\gamma f(z) \mathrm{e}^{Tg(z)} \mathrm{d}z \approx \sum_{z_0 \in \gamma_0} (\pm 1) f(z_0) \mathrm{e}^{g(z_0)T} \sqrt{\frac{2\pi}{-g''(z_0)T}}$$

jossa valitaan *"+"*, jos satulapiste z_0 ylitetään "normaalisuuntaan" (*vasemmalta oikealle tai pystysuoraan alhaalta ylös*), muuten se on "$-$"