1 Intro: Eulerin funktiot

- Sovelluksissa tulee usein vastaan integraaleja, joita ei voi laskea suoraan alkeisfunktioiden (exp, sin, $\sqrt{\cdot}$, jne.) avulla
- Tällöin pyritään muokkaamaan integraalia esimerkiksi muuttujanvaihdoilla muotoon, jossa sen voi sanoa jonkin tunnetun *erikoisfunktion* avulla
- Erikoisfunktioiden ominaisuuksia on taulukoitu paljon, ja niiden arvojen laskemista löytyy sekä tehokkaista approksimaatioita että valmiita numeerisia kirjastoja

1 Intro: Eulerin funktiot

- Sovelluksissa tulee usein vastaan integraaleja, joita ei voi laskea suoraan alkeisfunktioiden (exp, sin, $\sqrt{\cdot}$, jne.) avulla
- Tällöin pyritään muokkaamaan integraalia esimerkiksi muuttujanvaihdoilla muotoon, jossa sen voi sanoa jonkin tunnetun *erikoisfunktion* avulla
- Erikoisfunktioiden ominaisuuksia on taulukoitu paljon, ja niiden arvojen laskemista löytyy sekä tehokkaista approksimaatioita että valmiita numeerisia kirjastoja

Yksi tavallisimmista erikoisfunktioita on

Eulerin Gammafunktio

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t \,, \qquad \text{kun } \mathrm{Re}\, z > 0$$

2 Kertausta: analyyttisten funktioiden nollakohdista

- *Analyyttisen ei-vakion funktion nollakohdat ovat aina eristettyjä*, eli löytyy jokin kiekko, jonka ei sisällä muita funktion nollakohtia
- *Analyyttisellä ei-vakiolla funktiolla on äärellinen määrä nollakohtia kaikissa määrittelyalueeseensa sisältyvissä suljetuissa kiekoissa*
- Olkoon Ω **alue** ja (z_n) sen pistejono, jossa mikään piste ei toistu kahdesti ja jolle $\lim_{n\to\infty} z_n = z \in \Omega$. Jos $f, g \in H(\Omega)$ ja $f(z_n) = g(z_n)$ kaikilla n, pätee tällöin $f(w) = g(w)$ kaikilla $w \in \Omega$

Esimerkiksi, jos $f(z) = g(z)$ jollain janalla, joka sisältyy niiden analyyttisyysalueeseen, on $f = g$ koko analyyttisyysalueessa.

3 Analyyttinen jatkaminen

Edellä mainittua yksikäsitteisyysominaisuutta käytetään muodostamaan **analyyttisiä jatkeita** funktiolle:

- Olkoon f määritelty vain jossain kompleksitason epätyhjässä osajoukossa U (esim. avoin kiekko)
- Olkoon Ω on jokin U:n sisältävä alue ja $F, G \in H(\Omega)$ ovat funktion $f \in H(U)$ jatkeita (eli $F(z) = f(z) = G(z)$ kun $z \in U$)
- Koska joukko U on avoin ja epätyhjä, sisältää se jonkin avoimen kiekon, joka on yhtenäinen, joten täytyy olla $F = G$ koko joukossa Ω.

Analyyttiset jatkeet annettuun alueeseen ovat yksikäsitteisiä

4 Esimerkkejä analyyttisestä jatkamisesta

1 Jos f_0 on määritelty Taylorin sarjan avulla kiekossa D_0 ja $z_1 \in D_0$
$\Rightarrow$ f_0 on analyyttinen pisteessä z_1
$\Rightarrow$ f_0:llä on Taylorin sarja pisteen z_1 ympäristössä
$\Rightarrow$ saadaan funktio f_1 kiekossa $D_1 := B_{R_1}(z_1)$, jossa R_1 on Taylorin sarjan suppenemissäde

$F(z) = f_0(z)$, kun $z \in D_0$, ja $F(z) = f_1(z)$, kun $z \in D_1$, määrittelee analyyttisen jatkeen funktiolle f_0

4 Esimerkkejä analyyttisestä jatkamisesta

1. Jos f_0 on määritelty Taylorin sarjan avulla kiekossa D_0 ja $z_1 \in D_0$
   $\Rightarrow$ f_0 on analyyttinen pisteessä z_1
   $\Rightarrow$ f_0:llä on Taylorin sarja pisteen z_1 ympäristössä
   $\Rightarrow$ saadaan funktio f_1 kiekossa $D_1 := B_{R_1}(z_1)$, jossa R_1 on Taylorin sarjan suppenemissäde

   $F(z) = f_0(z)$, kun $z \in D_0$, ja $F(z) = f_1(z)$, kun $z \in D_1$, määrittelee analyyttisen jatkeen funktiolle f_0

2. Voidaan yrittää iteroida eteenpäin jotain äärellistä jonoa avoimia kiekkoja $(D_0, D_1, \ldots, D_n)$ pitkin
   $\Rightarrow$ Jos jatkeet löytyvät sanotaan, että *funktiolle f_0 löytyy kiekkoketjua $(D_0, D_1, \ldots, D_n)$ pitkin tehty analyyttinen jatke*

3. Jos γ on polku, joka lähtee kiekon D_0 keskipisteestä, voidaan rakentaa jono kiekkoja $(D_0, D_1, \ldots, D_n)$, jotka "peittävät" γ:n ja D_n:n keskipiste on polun päätepiste. Jos löytyy analyyttinen jatke jotain tällaista kiekkoketjua pitkin sanotaan, että *funktio f_0 voidaan jatkaa analyyttisesti polkua γ pitkin* $\Rightarrow$ *funktion f_0 analyyttinen jatke polun alkupisteen ympäristöstä sen päätepisteen ympäristöön*

5 Polkua pitkin tehdyn jatkeen ominaisuuksia

- Jos polulle γ löytyy jokin alkupisteestä päätepisteeseen tehty analyyttinen jatke, on tämä jatke yksikäsitteinen päätepisteen ympäristössä
- Vaikka polku γ olisi suljettu, *ei* saadun jatkeen f_n tarvitse olla sama kuin lähtöfunktio f_0 (vrt. logaritmi)
- Jos $D_0 \subset \Omega$ ja Ω on sellainen *yhdesti yhtenäinen alue*, että funktiolla $f_0 \in H(D_0)$ on analyyttinen jatke jokaista alueessa Ω kulkevaa polkua pitkin, löytyy funktiolle f_0 yksikäsitteinen analyyttinen jatke koko joukkoon Ω, eli löytyy $g \in H(\Omega)$, jolla $g(z) = f_0(z)$ kaikilla $z \in D_0$
- Näin löytyy myös funktiolle f_0 myös *maksimaalinen analyyttinen jatke* (voi olla useita)

6 Analyyttisyyden säilyminen integroitaessa

Oletetaan:

1. Ω kompleksitason avoin joukko
2. E jokin *parametrien joukko* (esimerkiksi avoin väli)
3. $f(t,z)$, $t \in E$, $z \in \Omega$, funktioita, jotka ovat *analyyttisiä jokaisessa pisteessä* z, kun parametri t pidetään kiinnitettynä

Analyyttisyyden periytyminen integroitaessa

Jos jokaista *suljettua kiekkoa* $D \subset \Omega$ kohti löytyy jokin dominoiva funktio $M(t)$, jolle pätee

$$|f(t,z)| \leq M(t)\,, \text{ kun } z \in D\,, \quad \text{ja} \quad \int_E M(t)\mathrm{d}t < \infty$$

niin kaavan $F(z) := \int f(t,z)\,\mathrm{d}t$ integraali suppenee itseisesti ja määrittelee koko joukossa Ω analyyttisen funktion F.

Sen m:n kertaluvun derivaatta toteuttaa

$$F^{(m)}(z) = \int_E \partial_z^m f(t,z)\mathrm{d}t\,, \qquad z \in \Omega$$

7 Eulerin Γ-funktio

Lähdetään liikkeelle määritelmästä

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t\,, \quad \text{kun } \mathrm{Re}\, z > 0$$

7 Eulerin Γ-funktio

Lähdetään liikkeelle määritelmästä

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t\,, \quad \text{kun } \operatorname{Re} z > 0$$

Tästä saadaan maksimaalinen analyyttinen jatke

Eulerin Gammafunktio

Kaikilla kompleksiluvuilla z, kunhan $z \neq 0, -1, -2, \ldots$,

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \int_1^\infty t^{z-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$$

- Γ-funktio on analyyttinen, lukuun ottamatta ensimmäisen kertaluvun napoja pisteissä $z = 0, -1, -2, \ldots$
- $\operatorname{Res}(\Gamma, -m) = \frac{(-1)^m}{m!}$, $m \in \mathbb{N}_0$
- Γ-funktiolle löytyy muitakin esityksiä (Wikipedia)
- $\Gamma(x) > 0$, kun $x > 0$ (seuraa integraalimääritelmästä)

8 Γ-funktion perusominaisuuksia

Seuraavat ominaisuudet pätevät kaikkialla kompleksitasossa napapisteitä lukuun ottamatta,

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)\,, \qquad z \neq 0, -1, -2, \dots$$

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)(z+n-2)\cdots z\Gamma(z)\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}\,, \qquad z \notin \mathbb{Z}$$

8 Γ-funktion perusominaisuuksia

Seuraavat ominaisuudet pätevät kaikkialla kompleksitasossa napapisteitä lukuun ottamatta,

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)\,, \qquad z \neq 0, -1, -2, \ldots$$
$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)(z+n-2)\cdots z\Gamma(z)\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}\,, \qquad z \notin \mathbb{Z}$$

Erikoisarvoja, joissa $n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma(n+1) = n!$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(k-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}\,, \qquad \Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n\sqrt{\pi}}{\prod_{k=1}^{n}\left(k-\frac{1}{2}\right)}$$

9 Eulerin B-funktio

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} \mathrm{d}t \,, \quad \operatorname{Re} p, \operatorname{Re} q > 0$$

9 Eulerin B-funktio

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t\,, \quad \mathrm{Re}\, p, \mathrm{Re}\, q > 0$$

Eulerin Betafunktio

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

- (*symmetrinen*) $B(q,p) = B(p,q)$
- B-funktion on *analyyttinen* sekä argumentissa p että q, poislukien Γ-funktioiden navat ja arvot, joilla $\Gamma(p+q) = 0$
- B-funktion avulla voi laskea binomikertoimia: kun $n, m \in \mathbb{N}$

$$B(n+1, m+1) = \frac{n!m!}{(n+m+1)!} = \left[(n+m+1)\binom{n+m}{n}\right]^{-1}$$