1 Distribuutiot

$$\delta[f] = \delta_{\mathbf{0}}[f] := f(\mathbf{0}) = {''}\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, \delta(\boldsymbol{r}) f(\boldsymbol{r})'' , \qquad \delta_{\boldsymbol{r}_0}[f] := f(\boldsymbol{r}_0)$$

1 Distribuutiot

$$\delta[f] = \delta_{\mathbf{0}}[f] := f(\mathbf{0}) = {}'' \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, \delta(\boldsymbol{r}) f(\boldsymbol{r})'' \,, \qquad \delta_{\boldsymbol{r}_0}[f] := f(\boldsymbol{r}_0)$$

Funktiojonon suppeneminen kohti distribuutiota

Jono $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funktioita $F_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ suppenee kohti distribuutiota Λ, jos kaikilla testifunktioilla f pätee

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}^d\boldsymbol{r}\, F_n(\boldsymbol{r}) f(\boldsymbol{r}) = \Lambda[f]$$

- Merkitään myös lyhyemmin $F_n \to \Lambda$, kun $n \to \infty$
- Esim: $\boldsymbol{r}_0 \in \mathbb{R}^d$, $g \geq 0$, $\int \mathrm{d}^d\boldsymbol{r} g(\boldsymbol{r}) = 1$, ja

$$F_n(\boldsymbol{r}) := n^d g(n(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)) \,, \quad \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^d \,, n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad F_n \xrightarrow{n\to\infty} \delta_{\boldsymbol{r}_0} \quad \Leftrightarrow \quad F_n(\boldsymbol{r}) \xrightarrow{n\to\infty} \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$$

2 Distribuutioiden matemaattinen määritelmä

Distribuutiot ovat jatkuvia lineaarikuvauksia

Matemaattisesti distribuutio Λ kuvaa testifunktion f kompleksiluvuksi $\Lambda[f] \in \mathbb{C}$ siten, että Λ on jatkuva ja lineaarinen

- Ominaisuudet riippuvat testifunktiojoukon valinnasta. Tavallisin valinta fysiikassa on käyttää testifunktioina Schwartzin funktioita, eli valita $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) =: \mathcal{S}_d$
  $\Rightarrow$ Tällöin Λ on *hillitty distribuutio* (engl. *tempered distribution*), merkitään $\Lambda \in \mathcal{S}'_d$
- Lineaarisuus tarkoittaa, että $\Lambda[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha\Lambda[f_1] + \beta\Lambda[f_2]$, kun $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ja $f_1, f_2 \in \mathcal{S}_d$

3 Esimerkkejä hillityistä distribuutioista

- Jos $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ ja löytyy $p > 0$, jolla

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\boldsymbol{r}|^2)^{-p} |F(\boldsymbol{r})| \mathrm{d}^d \boldsymbol{r} < \infty$$

$$\Rightarrow \quad \Lambda[f] := \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}^d \boldsymbol{r} F(\boldsymbol{r}) f(\boldsymbol{r})$$

  on hillitty distribuutio

- Diracin δ-distribuutiot rajoitettuna Schwartzin funktioihin määrittelevät hillittyjä distribuutioita

4 Distribuutioiden perusominaisuuksia

- Distribuutioista saa ottaa lineaarikombinaatioita:
  Jos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ja Λ_1, Λ_2 ovat distribuutioita, on myös $\alpha\Lambda_1 + \beta\Lambda_2$ distribuutio,

$$(\alpha\Lambda_1 + \beta\Lambda_2)[f] := \alpha\Lambda_1[f] + \beta\Lambda_2[f]\,, \qquad f \in \mathcal{S}_d$$

- Distribuutioita saa derivoida:
  Yhdessä ulottuvuudessa ($x \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{S}_1$) määritellään

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Lambda\right)[f] := -\Lambda[f']$$

  ja yleisesti ($\partial_i = \frac{\partial}{\partial r_i}$, $i = 1, 2, \ldots, d$)

$$(\partial_i\Lambda)[f] := -\Lambda[\partial_i f]$$

5 Distribuutioiden perusominaisuuksia

- Distribuutioita saa kertoa säännöllisillä funktioilla:
  Distribuution Λ kertominen funktiolla g tarkoittaa kuvausta

$$(g\Lambda)[f] := \Lambda[gf]$$

- Hillityistä distribuutioista saa ottaa Fourier'n muunnoksen:

$$\widehat{\Lambda}[f] := \Lambda\left[\widehat{f}\right], \qquad f \in \mathcal{S}_d$$

  Tämä toimii, koska $f \in \mathcal{S}_d \quad \Rightarrow \quad \widehat{f} \in \mathcal{S}_d$

6 "Muuttujanvaihto" distribuution sisällä

Mitä on $\delta(\varphi(x))$, kun φ on jokin muuttujanvaihto?

6 ”Muuttujanvaihto” distribuution sisällä

Mitä on $\delta(\varphi(x))$, kun φ on jokin muuttujanvaihto?

Etsitään x_0, jolle $\varphi(x_0) = 0$, ja määritellään

$$\delta(\varphi(x)) = \frac{1}{\varphi'(x_0)}\delta(x - x_0)$$

6 "Muuttujanvaihto" distribuution sisällä

Mitä on $\delta(\varphi(x))$, kun φ on jokin muuttujanvaihto?

Etsitään x_0, jolle $\varphi(x_0) = 0$, ja määritellään

$$\delta(\varphi(x)) = \frac{1}{\varphi'(x_0)}\delta(x - x_0)$$

δ-distribuution muuttujanvaihdot

Yleisemmin, jos φ on jokin riittävän säännöllinen kuvaus

$$\delta(\varphi(x)) := \sum_{x_0} \frac{1}{|\varphi'(x_0)|}\delta(x - x_0)\,,$$

jossa summataan kaikkien yhtälön $\varphi(x_0) = 0$ ratkaisujen yli

7 Distribuutioiden ”kertominen” keskenään

- Yleisesti ottaen distribuutioita *ei* voi suoraan kertoa keskenään
- Yleensä distribuutioista voi kuitenkin ottaa *konvoluutioita* (joko funktion tai distribuution kanssa)

7 Distribuutioiden "kertominen" keskenään

- Yleisesti ottaen distribuutioita *ei* voi suoraan kertoa keskenään
- Yleensä distribuutioista voi kuitenkin ottaa *konvoluutioita* (joko funktion tai distribuution kanssa)
- Voidaan myös yhdistää useita yksiulotteisia distribuutioita moniulotteiseksi distribuutioksi "kertomalla" niitä keskenään Esim.

$$\delta_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{r}) = \delta(r_1)\delta(r_2)\delta(r_3)\,, \qquad \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3$$

7 Distribuutioiden ”kertominen” keskenään

- Yleisesti ottaen distribuutioita *ei* voi suoraan kertoa keskenään
- Yleensä distribuutioista voi kuitenkin ottaa *konvoluutioita* (joko funktion tai distribuution kanssa)
- Voidaan myös yhdistää useita yksiulotteisia distribuutioita moniulotteiseksi distribuutioksi ”kertomalla” niitä keskenään
Esim.

$$\delta_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{r}) = \delta(r_1)\delta(r_2)\delta(r_3)\,, \qquad \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3$$

- Siirryttäessä $\mathbb{R}^3$:ssa pallokoordinaatteihin (kun $\boldsymbol{r}_0 \in \mathbb{R}^3$)

$$\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\,\delta_{\boldsymbol{r}_0}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,r^2\sin\theta\,\frac{1}{r_0^2}\delta(r-r_0)\delta(\cos\theta-\cos\theta_0)\delta(\varphi-\varphi_0)$$

8 Fourier'n muunnoksen pisteittäinen suppeneminen

Oletetaan:

1. f on itseisesti integroituva, eli $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \mathrm{d}x < \infty$.
2. Funktiolle löytyy vasen ja oikea raja-arvo, $f(x_0^-)$ ja $f(x_0^+)$

Dinin ehto

Jos löytyy jokin $r > 0$, jolla $\displaystyle\int_{-r}^{r} |\Phi(y; x_0)| \mathrm{d}y < \infty$,

$$\Phi(y; x_0) := \frac{f(x_0 + y) + f(x_0 - y) - f(x_0^-) - f(x_0^+)}{2y}, \qquad y \in \mathbb{R}$$

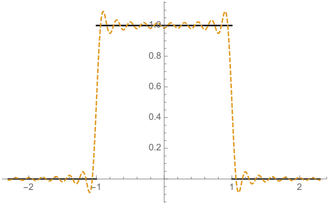
niin käänteismuunnoksen pääarvointegraalille pätee

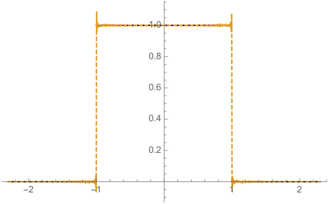
$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(p) \mathrm{e}^{\mathrm{i}px_0} \frac{\mathrm{d}p}{2\pi} := \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \widehat{f}(p) \mathrm{e}^{\mathrm{i}px_0} \frac{\mathrm{d}p}{2\pi} = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$$

- Erityisesti, *käänteismuunnos antaa arvoksi $f(x_0)$, jos f on jatkuva pisteessä x_0 ja toteuttaa Dinin ehdot*
- Dinin ehto toteutuu, jos löytyy $r > 0$, jolla f on *jatkuvasti derivoituva* väleillä $[x_0 - r, x_0]$ ja $[x_0, x_0 + r]$
- Funktio $f(x) := \mathbb{1}_{\{0<x\leq 1\}} x^{-p}$, jossa $\frac{1}{2} \leq p < 1$, toteuttaa siis ehdot kaikilla $x_0 \neq 0$ vaikka $\int |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \infty$

  $\Rightarrow$ *Neliöintegroituvuus ei ole välttämätöntä Fourier'n käänteismuunnoskaavan toimimiselle*

10 Gibbsin ilmiö





Funktio $f(x) = \mathbb{1}_{\{-1<x<1\}}$ (*musta viiva*) ja sen käänteismuunnoksen approksimaatio (*katkoviiva*)

$$I_R(x) = \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\, \widehat{f}(p) \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}$$

(*vasen kuva*) $R = 32$, (*oikea kuva*) $R = 1000$

Gibbsin ilmiö konvergenssin epätasaisuudesta näkyy selvästi epäjatkuvuuspisteissä $x = \pm 1$

11 Mellinin muunnos

Oletetaan, että $a < b$ on annettu, ja pätee

$$\int_0^{\infty} t^{2\sigma-1}|f(t)|^2 \mathrm{d}t < \infty\,, \quad \text{kaikilla } a < \sigma < b$$

Tällöin määritellääån funktion f **Mellinin muunnos** $F = \mathcal{M}f$

$$F(s) := \int_0^{\infty} t^{s-1} f(t) \mathrm{d}t\,, \qquad a < \mathrm{Re}\, s < b$$

Funktion f arvot saadaan esitettyä käänteismuunnoksella $(t > 0)$

$$f(t) = \int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty} t^{-s} F(s) \frac{\mathrm{d}s}{2\pi\mathrm{i}}\,, \qquad a < \sigma < b$$

- Mellinin muunnos $F(s)$ on *analyyttinen funktio*, $a < \mathrm{Re}\, s < b$, jos
$$\int_0^{\infty} t^{\sigma-1}|f(t)| \mathrm{d}t < \infty\,, \qquad a < \sigma < b$$
- Hyvä vaihtoehto, kun f käyttäytyy kuten *potenssifunktio*